

INŽENJERSKA GEODEZIJA 1

PREDAVANJE

Analitička geometrija inženjerskih objekata

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, 2026.



Šta ćemo učiti u okviru ovog predavanja?

U okviru ovog predavanja učićete:

- **Geometrija inženjerskih objekata**
- **Analitička geometrija inženjerskih objekata**
- **Analitička razrada geometrije objekata – računanje koordinata**
- **Geometrija linijskih - infrastrukturnih objekata:**
 - **Geometrija objekta u horizontalnom smislu**
 - **Geometrija objekta u visinskom smisli**

Šta ćemo učiti u okviru ovog predavanja?

Svaki inženjerski objekat ima noseći sistem koji se naziva **konstrukcija objekta** i sastoji se od delova koje nazivamo **konstruktivnim elementima**. Konstruktivni elementi objekata mogu biti:

- linijski konstruktivni elementi – linijski nosač, štap, greda, stub, konzola;
- površinski konstruktivni elementi – ravanska rešetka, ram u ravni, ploča i slično;
- prostorni konstruktivni elementi – prostorna rešetka i ram, ljuska i elementi u obliku drugih geometrijskih tela.

Konstruktivne elemente moguće je aproksimirati jednostavnim geometrijskim elementima ili figurama (tačkama, pravama, ravnima, osnovnim telima) . Skup tih geometrijskih elemenata čini jednu celinu, tzv. **GEOMETRIJU OBJEKTA**.

Analitička razrada geometrije inženjerskih objekata

Pod analitičkom razradom geometrije inženjerskih objekata podrazumevamo primenu analitičke geometrije (koordinatne geometrije) u cilju izračunavanja koordinata karakterističnih tačaka geometrije objekta. Preduslov za to je poznavanje pozicije objekta u usvojenom koordinatnom sistemu. Za inženjerske objekte to je najčešće pravougli Kartezijanski koordinatni sistem (X, Y, Z) ili (Easting, Northing, Height).

Određivanje pozicije objekta u usvojenom koordinatnom sistemu podrazumeva određivanje prostornih odnosa objekta i usvojene referentne geodetske mreže objekta (povezivanje objekta i geodetske mreže).

Projektovanje objekta se vrši na prethodno geo-referenciranim digitalnim geodetskim planovima. Ostvarivanjem veze između koordinatnog sistema mreže i projekta obezbeđuje se pozicija objekta u odnosu na geodetsku mrežu.

Geometrija inženjerskih objekata

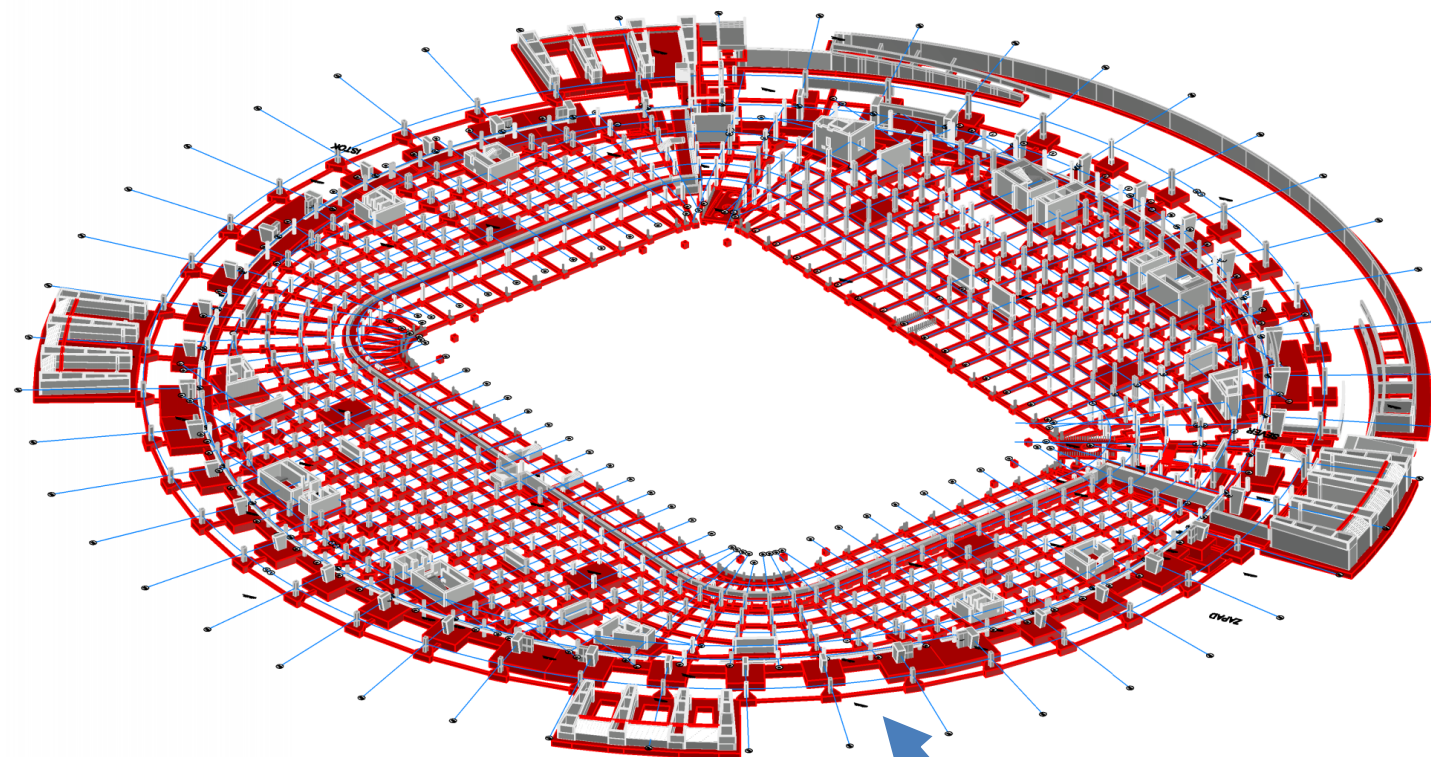
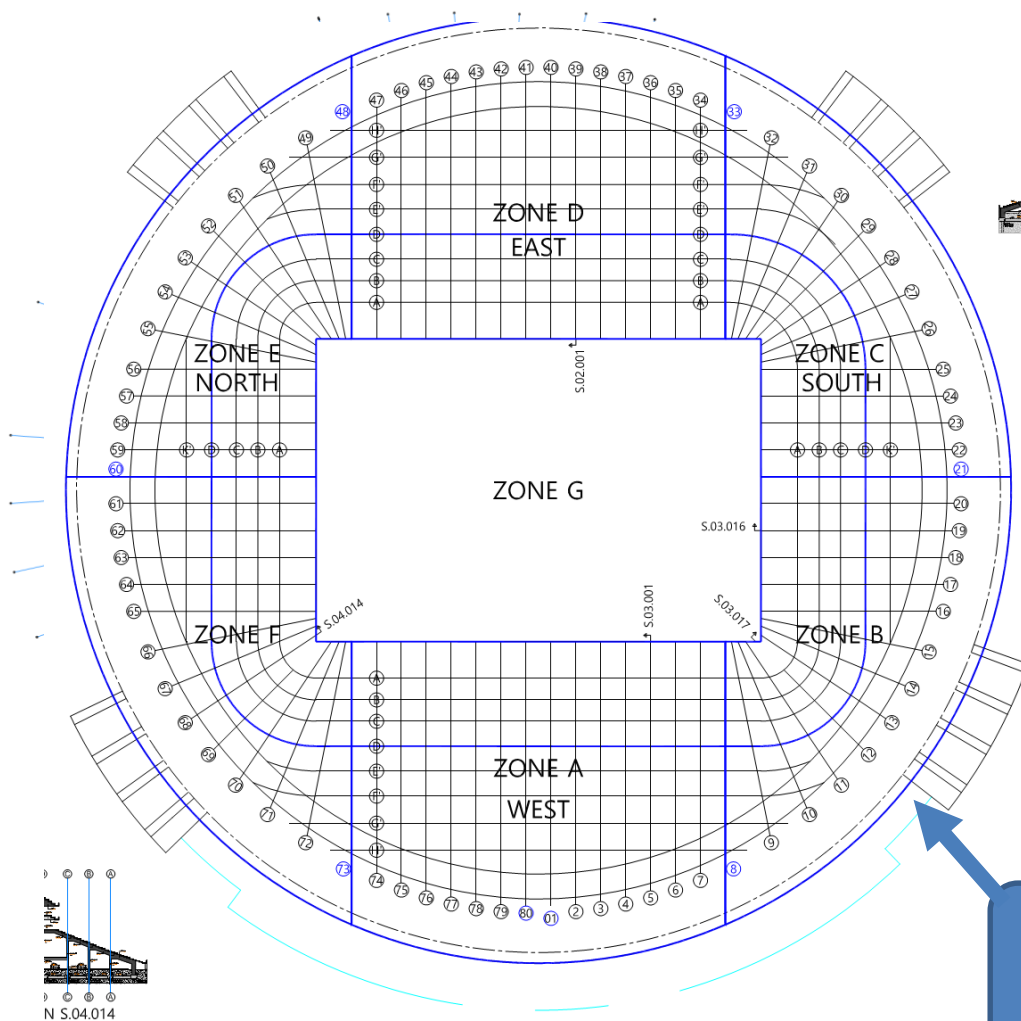
Matematički – geometrijski opis objekta u koordinatnom sistemu omogućava nam da:

- Izračunamo koordinate karakterističnih tačaka objekta. Dobijene koordinate tačaka mogu se koristiti za obeležavanje ili za upoređenje stvarnog i projektovanog stanja.
- Izračunamo površine. Tipični primeri su površine poprečnih preseka, zidova, fasada, betonskih elemenata itd.).
- Izračunamo kubature. Najčešće su to kubature iskopa i nasipa.
- Kontrolišemo geometriju - odredimo odstupanja realnog objekta od idealizovane geometrije. Tipični primeri su vertikalnost ose stuba, odstupanje horizontalne ose od projektovane, devijacija zida od ravni,
- Simplifikujemo objekat radi analize, vizualizacije i obrade podataka.

Geometrija inženjerskih objekata – ose objekta

Najosnovnija aproksimacija geometrije konstruktivnog sistema, odnosno položaja i rasporeda (međusobnog odnosa) konstruktivnih elemenata (noseći zidovi, stubovi, grede) ostvaruje se kroz mrežu osa objekta. Mreža osa objekta obezbeđuje sistematičan okvir za projektovanje, planiranje gradnje i za razumevanje konstrukcije nekog objekta. Ose objekta služe kao univerzalni koordinatni sistem za projektovanje (koordinaciju svih projektnih crteža), izvođenje, i unapređenje komunikacije između učesnika. Karakteristični konstruktivni elementi, poput stubova i nosećih zidova, postavljaju se na ose objekta ili u njihov presek, što omogućava precizno i jednoznačno pozicioniranje. U tom smislu, mreža osa objekta obezbeđuje koordinaciju i konzistentnost. Isti mrežni sistem se koristi na svim crtežima (crtežu temelja, osnova spratova, presecima itd.). Ose objekta najčešće prolaze kroz središta konstruktivnih elemenata ili se poklapaju sa spoljašnjom linijom zidova ili stubova. Mreža osa objekta definiše osnovne dimenzije objekta i služi kao osnova za određivanje položaja ostalih, nekonstruktivnih elemenata (pregradni zidovi, otvori, instalacije).

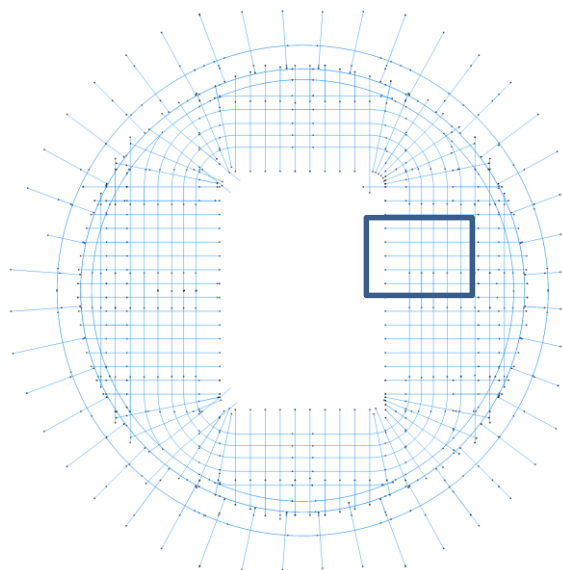
Geometrija inženjerskih objekata



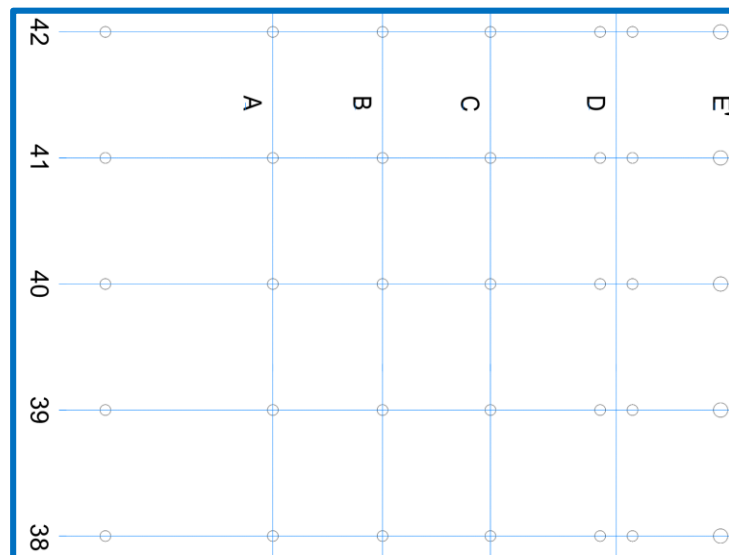
Ose objekta

Temeljna
konstrukcija

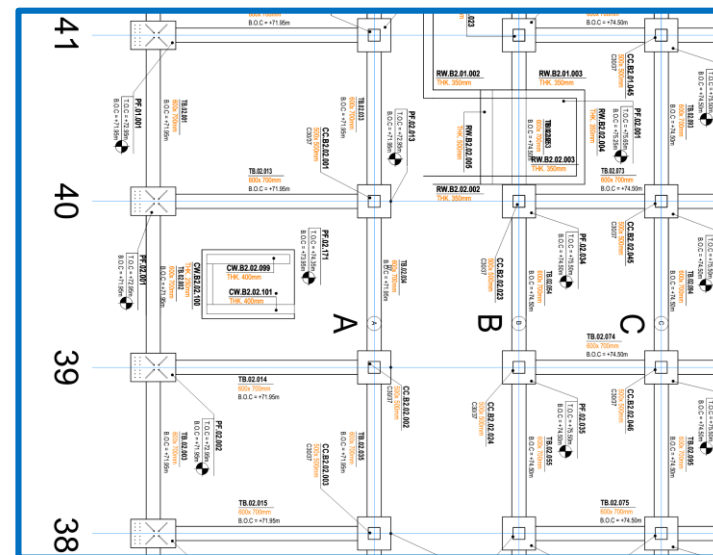
Geometrija inženjerskih objekata



Ose objekta



Položaj šipova



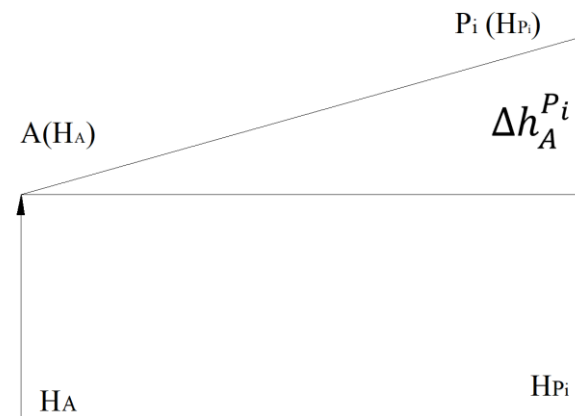
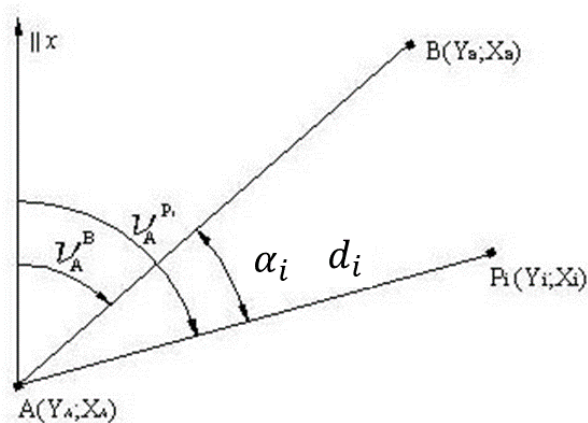
Položaj temeljne konstrukcije

Geometrija inženjerskih objekata

Koordinate karakterističnih tačaka objekta određuju se na osnovu koordinata i kota tačaka geodetske mreže objekta i formula za:

- računanje koordinata tačaka na liniji i upravnoj;
- računanje koordinata tačke na preseku dva pravca;
- računanje koordinata tačaka u preseku linije i kružnice;
- računanje koordinata tačaka u preseku dve kružnice;
- računanje koordinata tačaka na kružnoj liniji;
- i slično.

Računanje koordinata tačka



Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, d_i, \alpha_i, H_A, \Delta h_A^{P_i}$.

Nepoznato: $Y_{P_i}, X_{P_i}, H_{P_i}$.

$$\begin{aligned} Y_{P_i} &= Y_A + d_i \sin(v_A^{P_i}) \\ X_{P_i} &= X_A + d_i \cos(v_A^{P_i}) \\ H_{P_i} &= H_A + \Delta h_A^{P_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_A^{P_i} &= v_A^B + \alpha_i \\ v_A^B &= \arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \end{aligned}$$

Računanje koordinata tačka na pravcu

Dato: Y_A, X_A, Y_B, X_B, d_1 .

Nepoznato: Y_1, X_1 .

Rešenje:

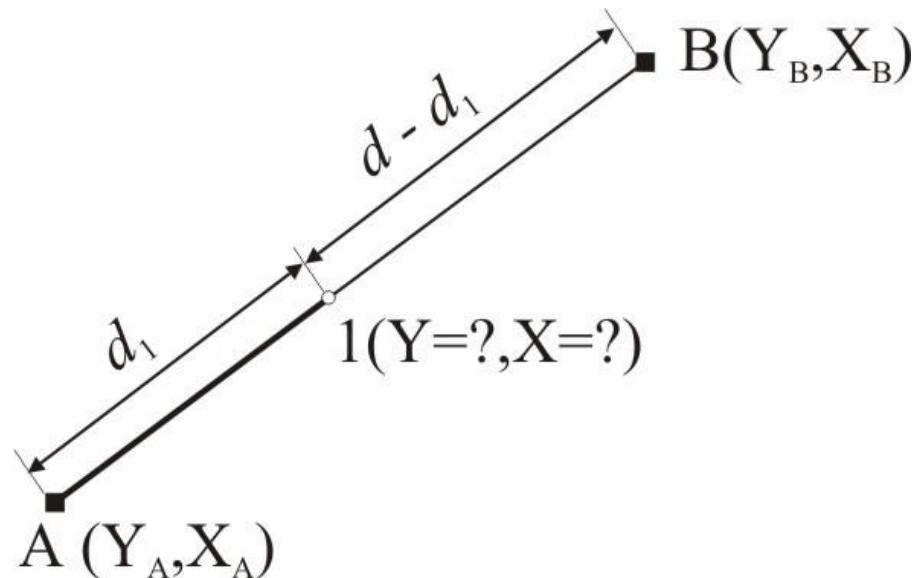
$$Y_1 = Y_A + d_1 \cdot \sin(v_A^B)$$

$$X_1 = X_A + d_1 \cdot \cos(v_A^B)$$

Kontrola računanja:

$$Y_1 = Y_B + (d - d_1) \cdot \sin(v_B^A)$$

$$X_1 = X_B + (d - d_1) \cdot \cos(v_B^A)$$



Računanje koordinata tačaka na pravcu

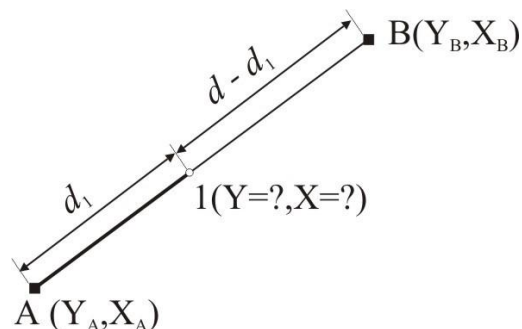
Dato: Y_A, X_A, Y_B, X_B, d_1 .

Nepoznato: Y_1, X_1 .

Rešenje:

$$Y_1 = Y_A + d_1 \cdot \sin(v_A^B)$$

$$X_1 = X_A + d_1 \cdot \cos(v_A^B)$$



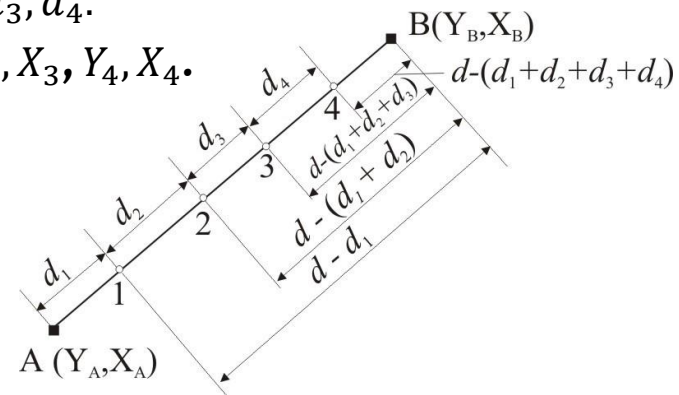
Kontrola računanja:

$$Y_1 = Y_B + (d - d_1) \cdot \sin(v_B^A)$$

$$X_1 = X_B + (d - d_1) \cdot \cos(v_B^A)$$

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, d_1, d_2, d_3, d_4$.

Nepoznato: $Y_1, X_1, Y_2, X_2, Y_3, X_3, Y_4, X_4$.



Rešenje:

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= Y_A + \sum_{j=1}^i d_j \cdot \sin(v_A^B) \\ X_i &= X_A + \sum_{j=1}^i d_j \cdot \cos(v_A^B) \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, 4$$

Računanje koordinata tačaka na linijama upravnim na definisani pravac

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, d_1, d_2, \dots, d_7$.

Nepoznato: $Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_7, X_7$.

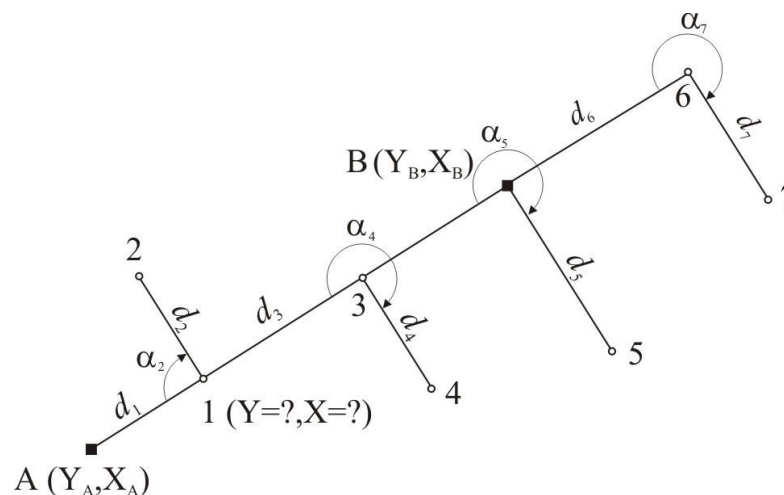
Koordinate tačaka 1, 3 i 6 se računaju na osnovu formula koje su prikazane na prethodnim slajdovima.

$$Y_2 = Y_1 + d_2 \cdot \sin(\nu_A^B - 90^\circ)$$

$$X_2 = X_1 + d_2 \cdot \cos(\nu_A^B - 90^\circ)$$

$$Y_5 = Y_B + d_5 \cdot \sin(\nu_A^B + 90^\circ)$$

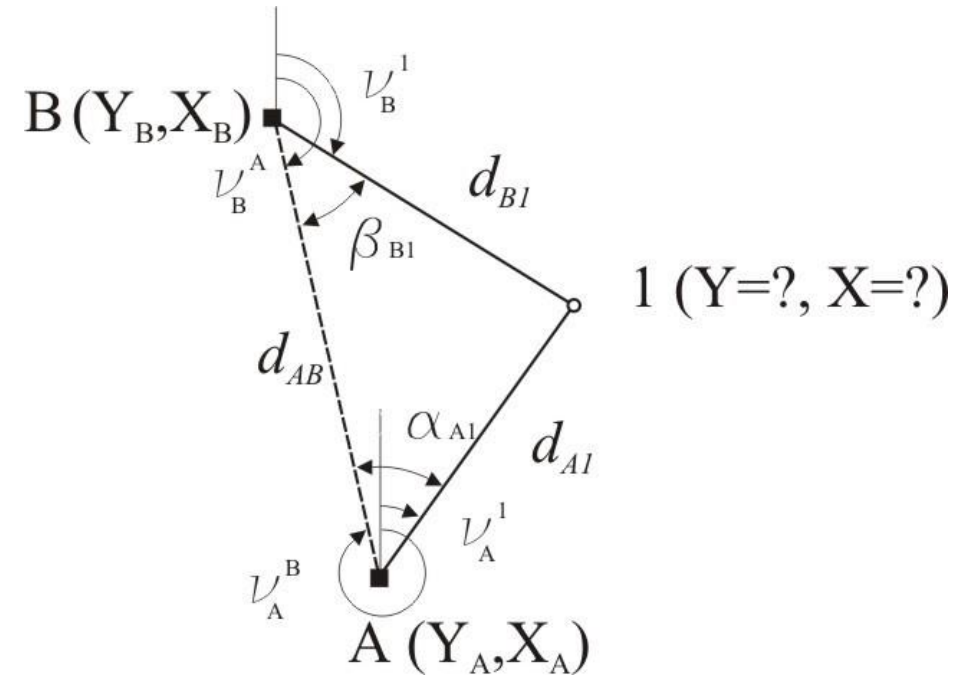
$$X_5 = X_B + d_5 \cdot \cos(\nu_A^B + 90^\circ)$$



Računanje koordinata tačke na preseku dva pravca – presek pravaca napred

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, \alpha_{A1}, \beta_{B1}$.

Nepoznato: Y_1, X_1



Rešenje:

$$Y_1 = Y_A + d_{A1} \cdot \sin(\nu_A^B + \alpha_{A1})$$

$$X_1 = X_A + d_{A1} \cdot \cos(\nu_A^B + \alpha_{A1})$$

Kontrola računanja:

$$Y_1 = Y_B + d_{B1} \cdot \sin(\nu_B^A - \beta_{B1})$$

$$X_1 = X_B + d_{B1} \cdot \cos(\nu_B^A - \beta_{B1})$$

Računanje koordinata tačaka na linijama upravnim na definisani pravac

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, \alpha_{A1}, \beta_{B1}$.

Nepoznato: Y_1, X_1 .

Sinusna teorema:

$$\frac{d_{AB}}{\sin(180^\circ - \alpha_{A1} - \beta_{B1})} = \frac{d_{A1}}{\sin(\beta_{B1})} = \frac{d_{B1}}{\sin(\alpha_{A1})},$$

$$d_{A1} = \frac{d_{AB}}{\sin(180^\circ - \alpha_{A1} - \beta_{B1})} \cdot \sin(\beta_{B1}),$$

$$d_{B1} = \frac{d_{AB}}{\sin(180^\circ - \alpha_{A1} - \beta_{B1})} \cdot \sin(\alpha_{A1}).$$

Rešenje:

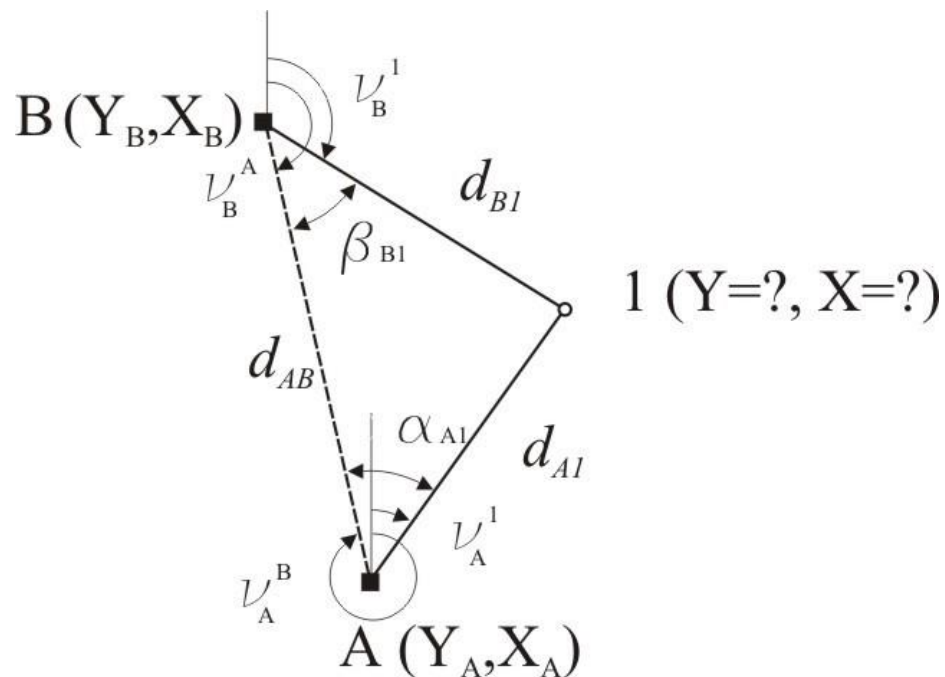
$$Y_1 = Y_A + d_{A1} \cdot \sin(v_A^B + \alpha_{A1})$$

$$X_1 = X_A + d_{A1} \cdot \cos(v_A^B + \alpha_{A1})$$

Kontrola računanja:

$$Y_1 = Y_B + d_{B1} \cdot \sin(v_B^A - \beta_{B1})$$

$$X_1 = X_B + d_{B1} \cdot \cos(v_B^A - \beta_{B1})$$



Računanje koordinata tačke na preseku dva pravca – presek pravaca napred

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, Y_C, X_C, Y_D, X_D$.

Nepoznato: Y_1, X_1

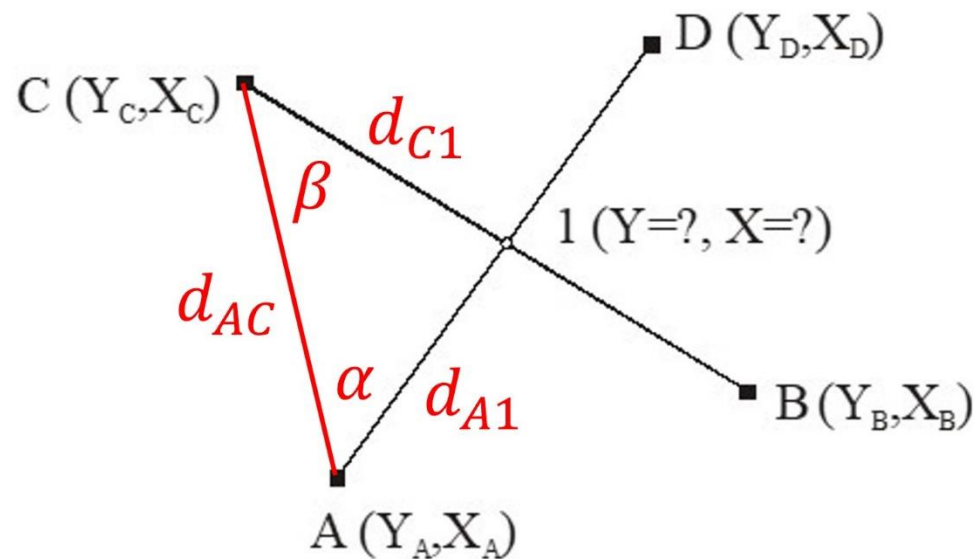
Rešavanje trougla AC1:

$$\alpha = v_A^D - v_A^C, \beta = v_C^A - v_C^B,$$

$$\frac{d_{AC}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{d_{A1}}{\sin(\beta)} = \frac{d_{C1}}{\sin(\alpha)}$$

$$d_{A1} = \frac{d_{AC}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} \cdot \sin(\beta)$$

$$d_{C1} = \frac{d_{AC}}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} \cdot \sin(\alpha)$$



$$Y_1 = Y_C + d_{C1} \cdot \sin(v_C^B)$$

$$X_1 = X_C + d_{C1} \cdot \cos(v_C^B)$$

$$Y_1 = Y_A + d_{A1} \cdot \sin(v_A^D)$$

$$X_1 = X_A + d_{A1} \cdot \cos(v_A^D)$$

Računanje koordinata tačaka na preseku prave linije i kružnice

Dato: $Y_A, X_A, Y_B, X_B, Y_C, X_C, R$.

Nepoznato: Y_1, X_1, Y_2, X_2

Rešavanje trougla AC1:

$$d = \sqrt{(Y_C - Y_A)^2 + (X_C - X_A)^2}, \quad R = d_{C1}$$

$$\angle A = \alpha = v_A^C - v_A^B, \angle 1 = \beta, \angle C = \gamma,$$

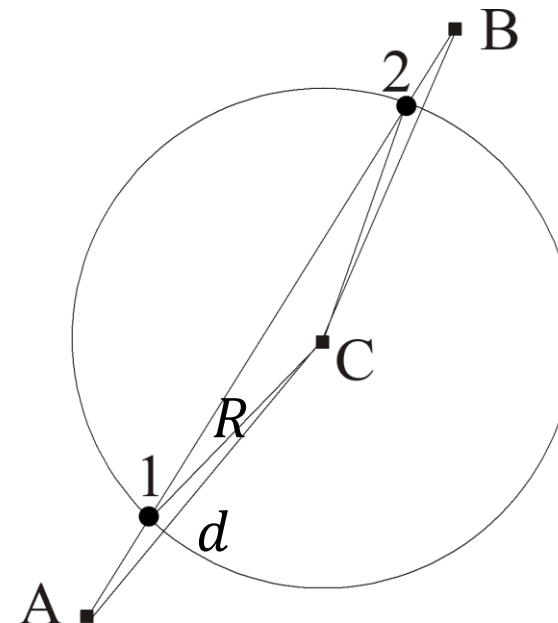
$$\frac{R}{\sin(\alpha)} = \frac{d}{\sin(\beta)} = \frac{d_{A1}}{\sin(\gamma)} \Rightarrow$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{d \sin(\alpha)}{R}\right),$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta, d_{A1} = \frac{R}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma)$$

$$Y_1 = Y_A + d_{A1} \cdot \sin(v_A^B)$$

$$X_1 = X_A + d_{A1} \cdot \cos(v_A^B)$$



Računanje koordinata tačaka na preseku dve kružnice – lučni presek

Dato: $Y_{C_1}, X_{C_1}, Y_{C_2}, X_{C_2}, R_1, R_2$.

Nepoznato: Y_1, X_1, Y_2, X_2

Rešavanje trougla C_11C_2 :

$$d = \sqrt{(Y_{C_1} - Y_{C_2})^2 + (X_{C_1} - X_{C_2})^2},$$

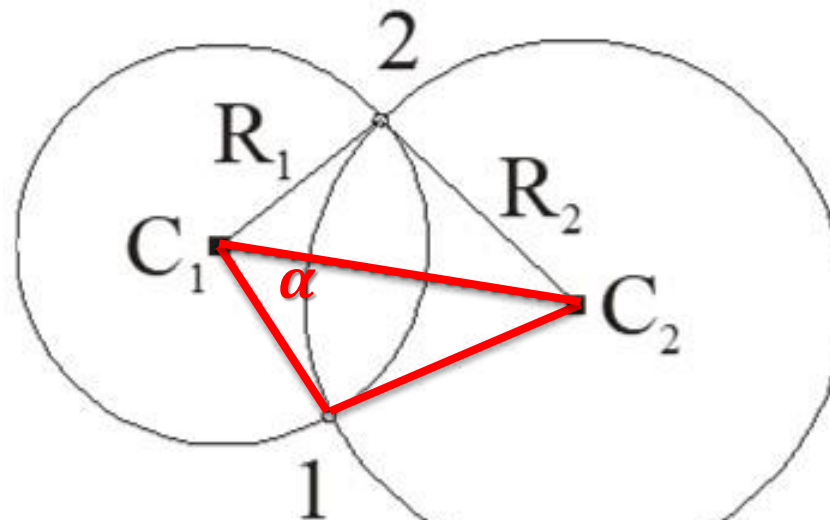
$$\angle C_1 = \alpha, \angle 1 = \beta, \angle C_2 = \gamma,$$

$$R_2^2 = d^2 + R_1^2 - 2dR_1 \cos(\alpha),$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2dR_1}\right).$$

Kosinusna teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



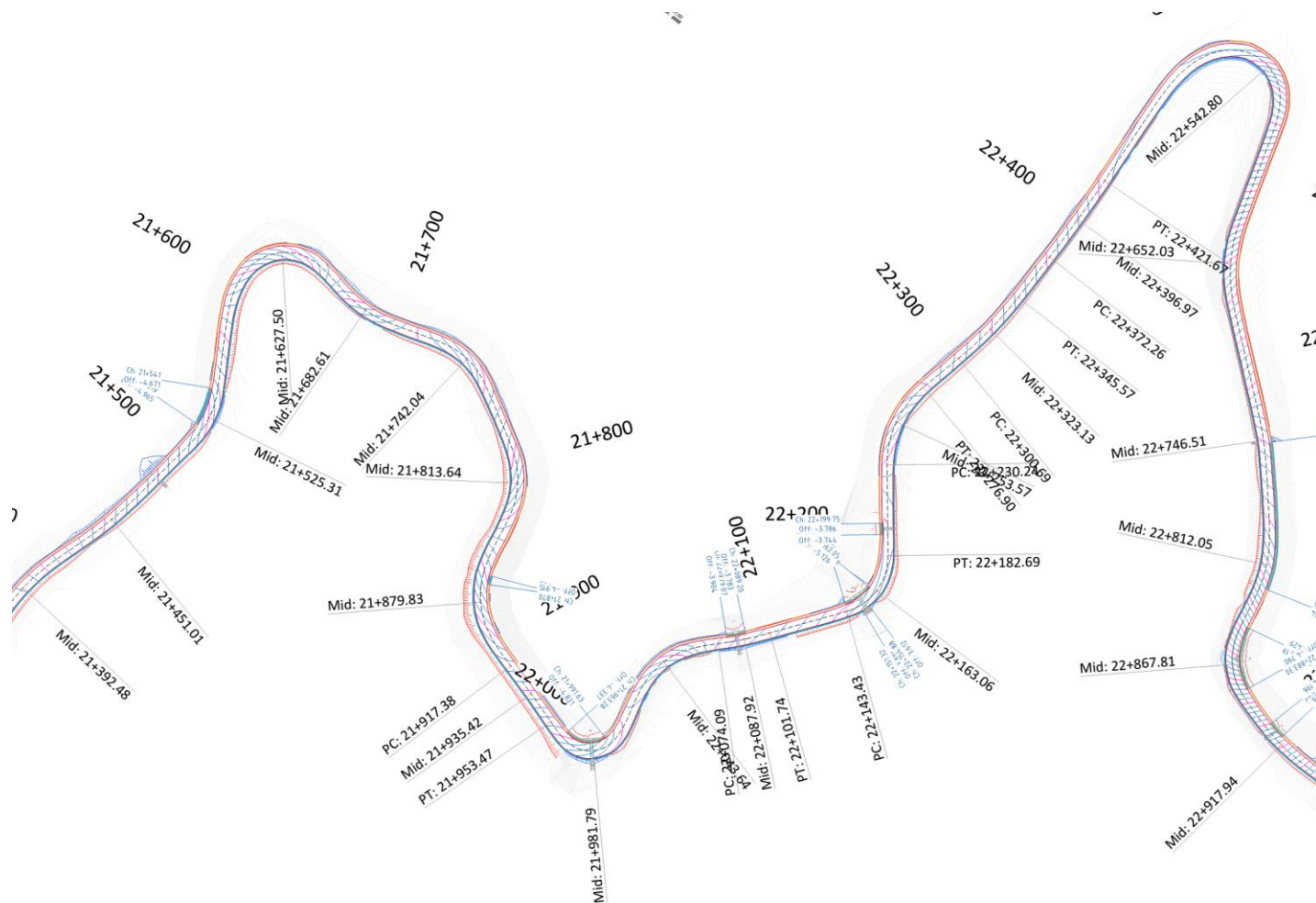
$$Y_1 = Y_{C_1} + R_1 \cdot \sin\left(\nu_{C_1}^{C_2} + \alpha\right)$$

$$X_1 = X_{C_1} + R_1 \cdot \cos\left(\nu_{C_1}^{C_2} + \alpha\right)$$

Geometrija infrastrukturnih linijskih objekata



Geometrija infrastrukturnih linijskih objekata



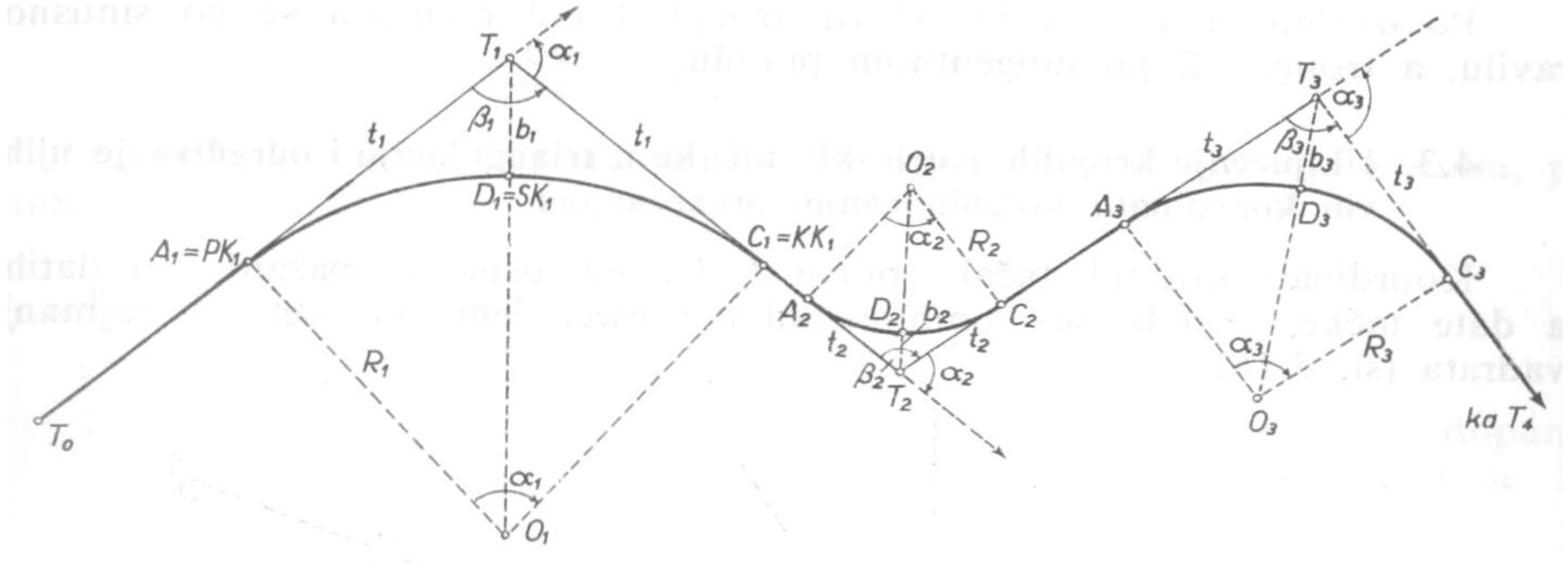
Elementi horizontalne trase ose objekta

Prva aproksimacija linijskog infrastrukturnog objekta u horizontalnom smislu je osa objekta. Osa objekta je prostorna linija u horizontalnoj ravni koja predstavlja trasu objekta. Najčešće je to središnja linija objekta.

Karakteristični elementi ose su:

- Tangentni pravci – pravci koji definišu trasu između krivina kao i tangente krivina u početnim i krajnjim tačkama
- Krivine – Krivine povezuju dva tangentna pravca i obezbeđuju promenu pravca
- Stacionaža – horizontalno rastojanje neke tačke na trasi, mereno od početka trase duž trase.

Geometrija infrastrukturnih linijskih objekata

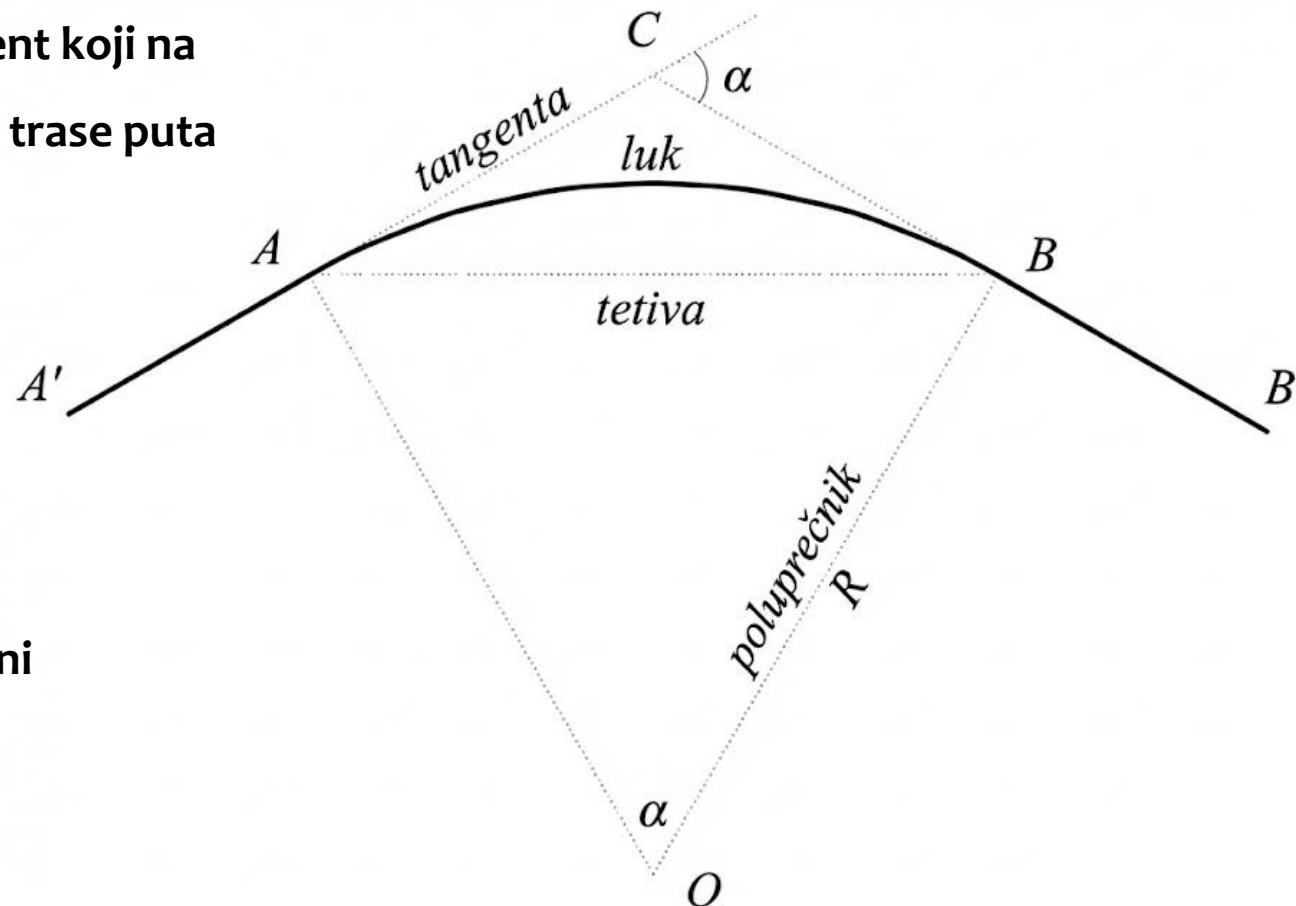


Tipovi krivina – kružna krivina

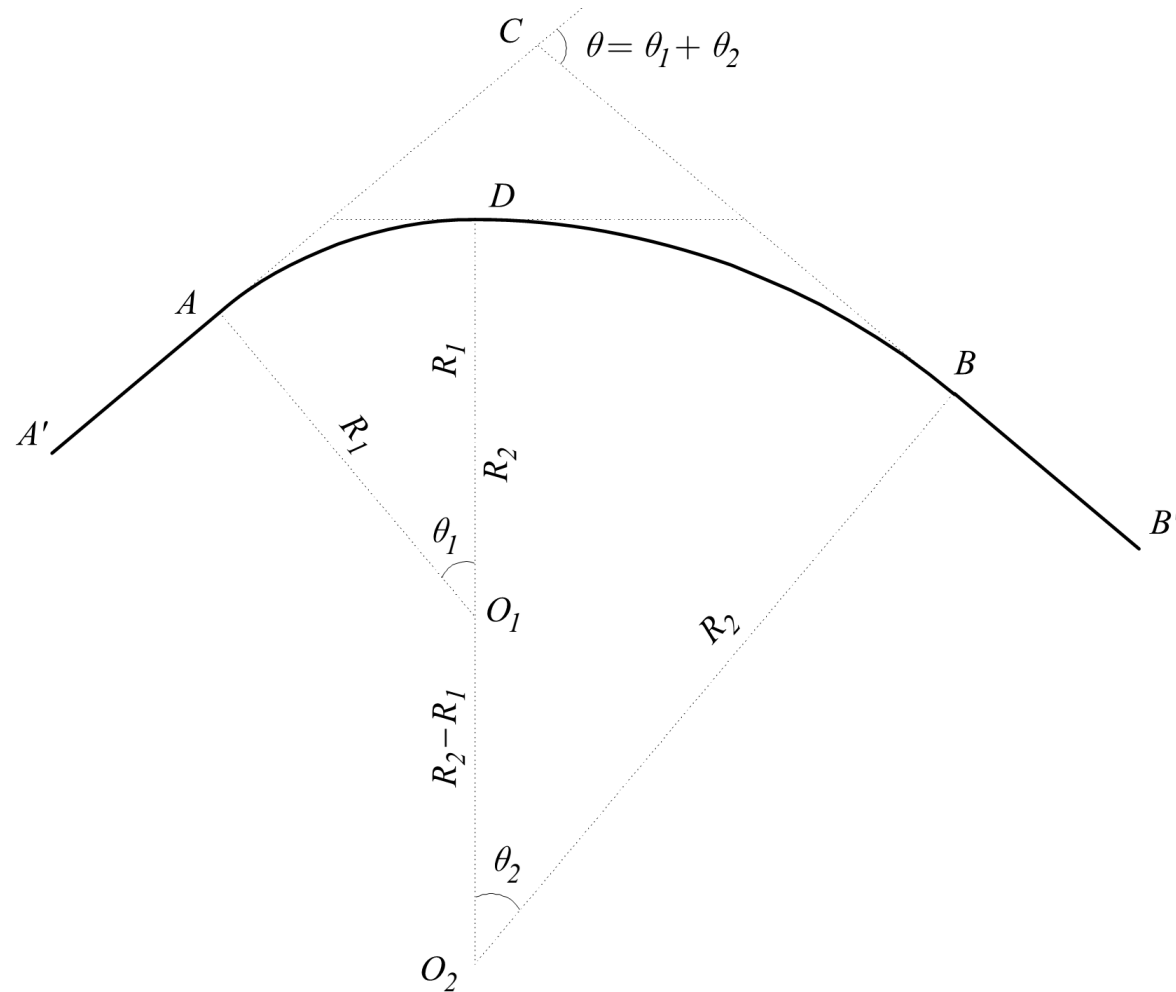
Horizontalna kružna krivina je geometrijski element koji na najjednostavniji način omogućava prilagođavanje trase puta terenu kroz koji prolazi.

Ključne osobine horizontalne kružne krivine:

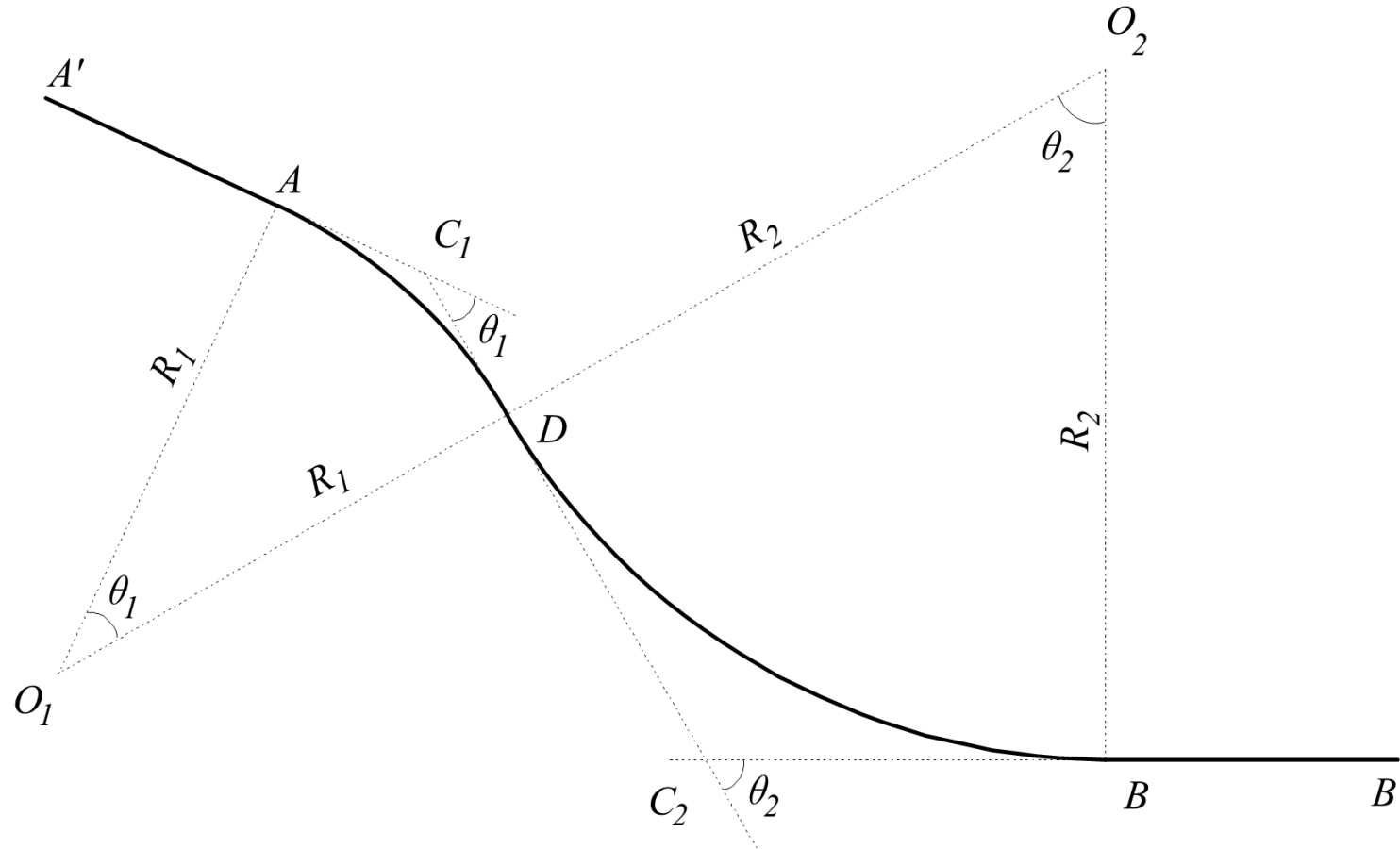
- konstantna zakrivljenost $C = 1/R$;
- centralni ugao jednak je skretnom uglu;
- ugao između tangente i tetive jednak je polovini centralnog ugla.



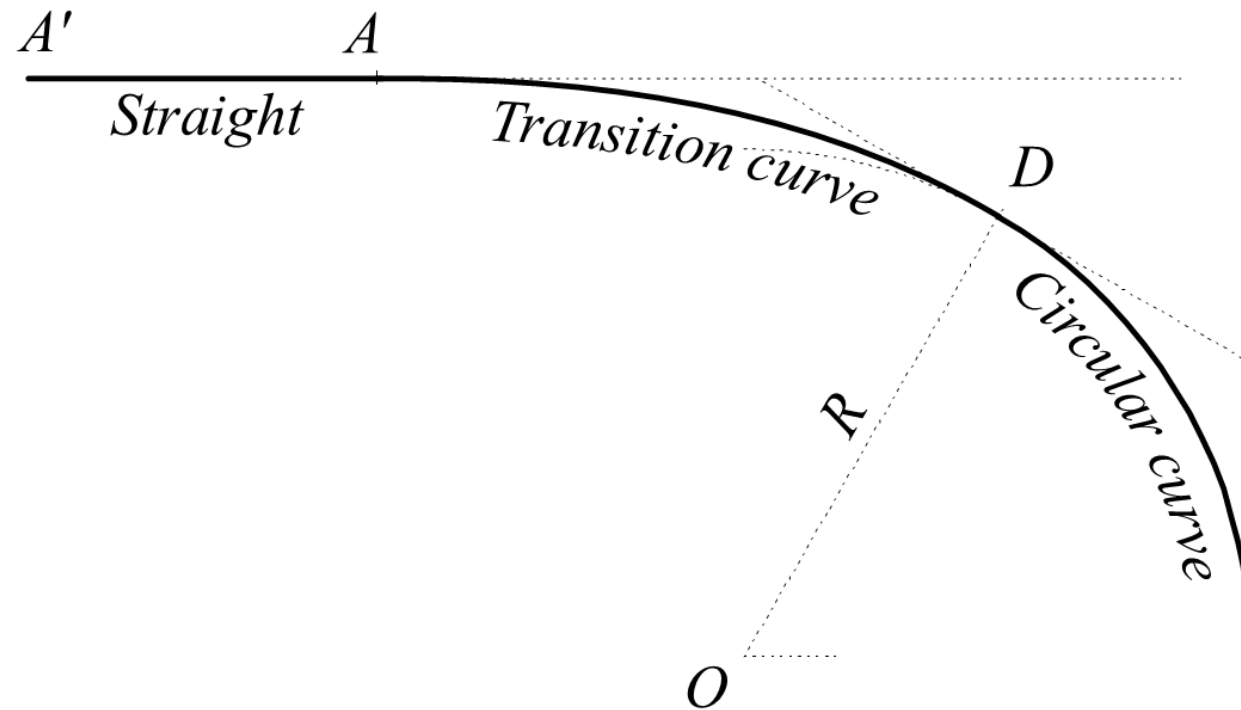
Tipovi krivina: Složena - kružna krivina



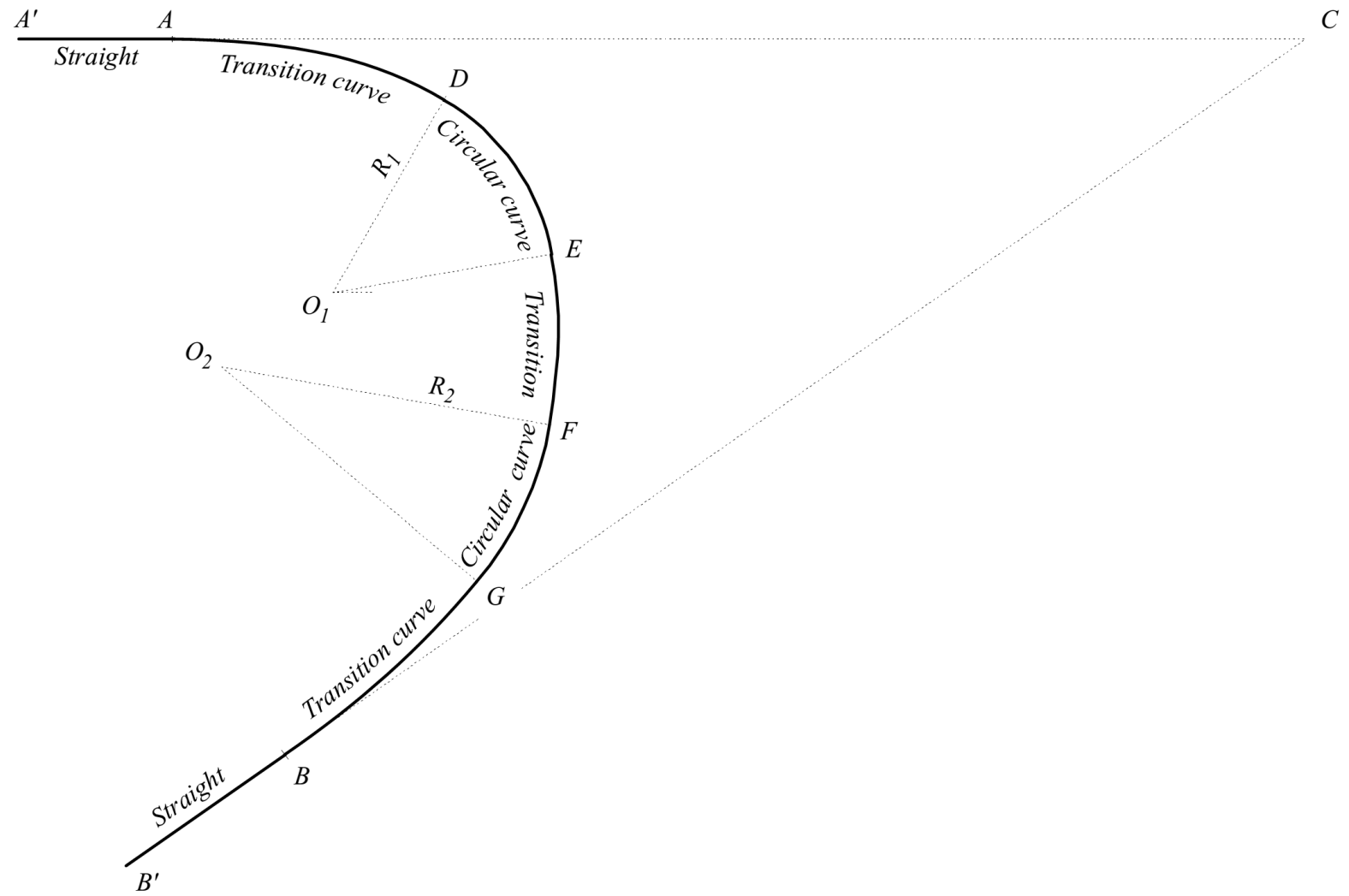
Tipovi krivina: Obrnuta kružna krivina – S krivina



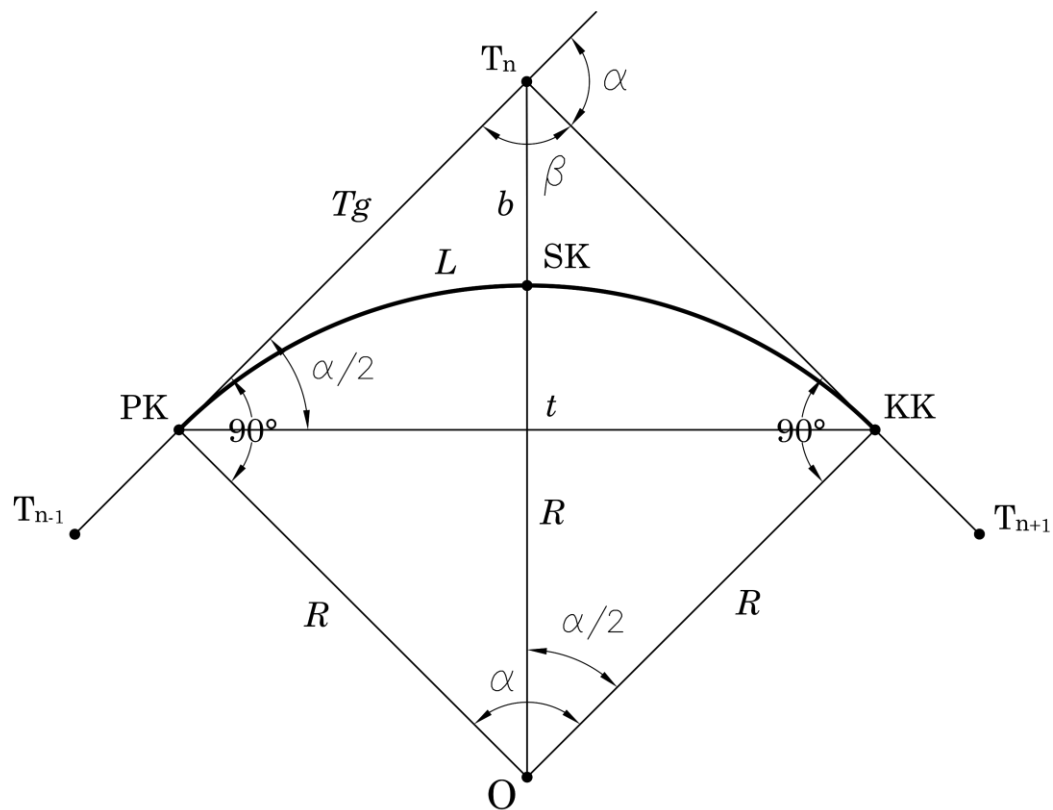
Tipovi krivina: Krivina sa prelaznicom (prelaznom krivinom)



Tipovi krivina: Krivina sa prelaznicom (prelaznom krivinom)



Geometrija kružne krivine – karakteristične tačke



PK – početak krivine

SK – sredina krivine

KK – kraj krivine

0 – centar krivine

R – poluprečnik kružnog luka

α – skretni (centralni) ugao

β – prelomni ugao

T_g – tangenta

b – bisektrisa

L – dužina kružnog luka

***t* – tetiva**

Geometrija kružne krivine – glavni elementi

Dato: $R, \alpha = v_{T_n}^{T_{n+1}} - v_{T_{n-1}}^{T_n}$.

Nepoznato: Tg, b, L, t .

$$Tg = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

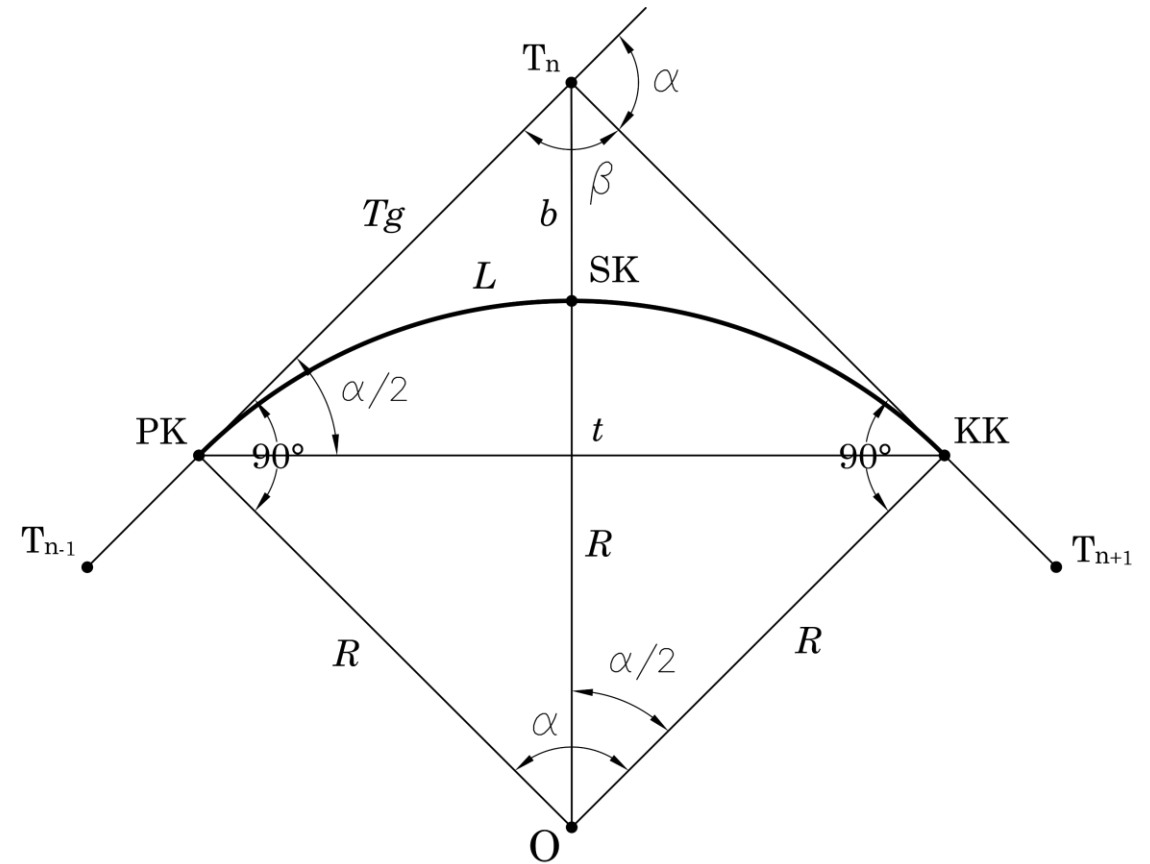
$$L = \frac{R \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

$$t = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{R+b}$$

$$\Rightarrow b = \frac{R}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - R$$

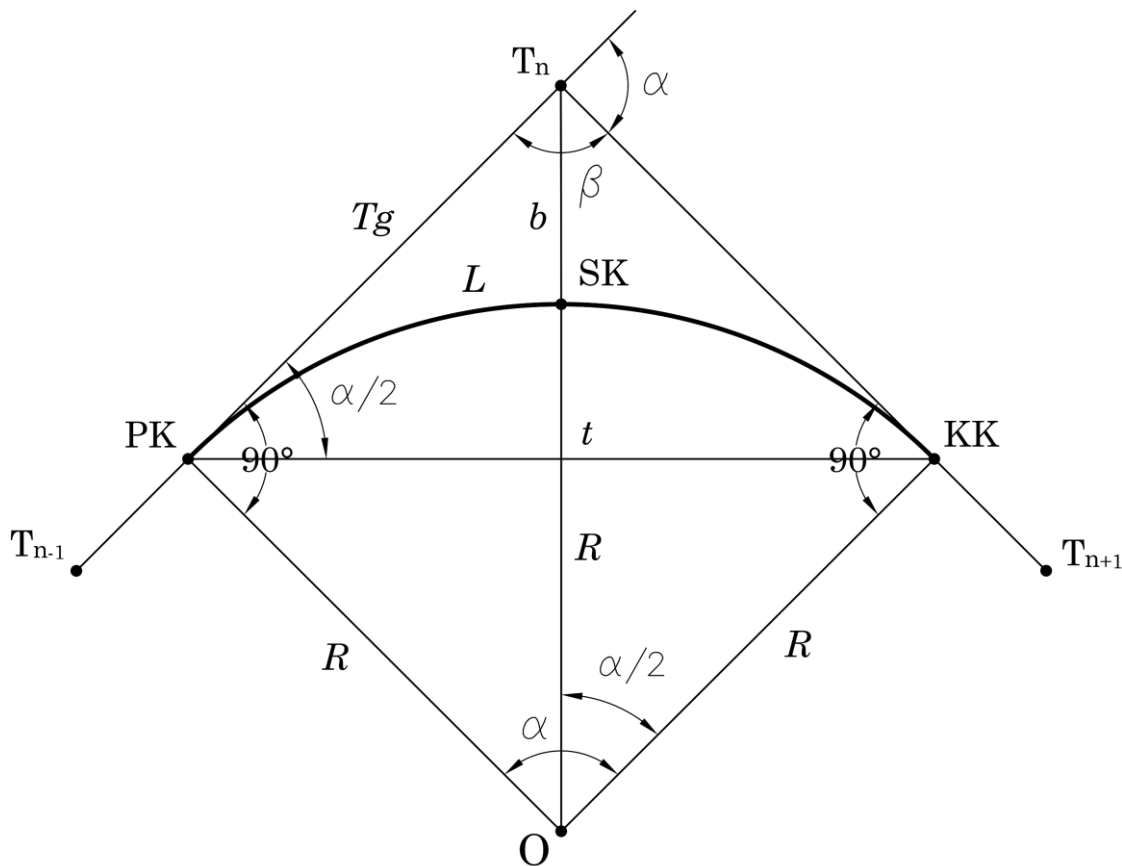
$$\Rightarrow b = R \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - 1 \right)$$



Geometrija kružne krivine – računanje koordinate glavnih tačaka

Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$.

Nepoznato: $Y_{PK}, X_{PK}, Y_{SK}, X_{SK}, Y_{KK}, X_{KK}, Y_O, X_O$.



$$Y_{PK} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n-1}})$$

$$X_{PK} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n-1}})$$

$$Y_{KK} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n+1}})$$

$$X_{KK} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n+1}})$$

$$v_{T_n}^{SK} = v_{T_n}^O = v_{T_n}^{T_{n+1}} + \beta/2$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$Y_{SK} = Y_{T_n} + b \cdot \sin(v_{T_n}^{SK})$$

$$X_{SK} = X_{T_n} + b \cdot \cos(v_{T_n}^{SK})$$

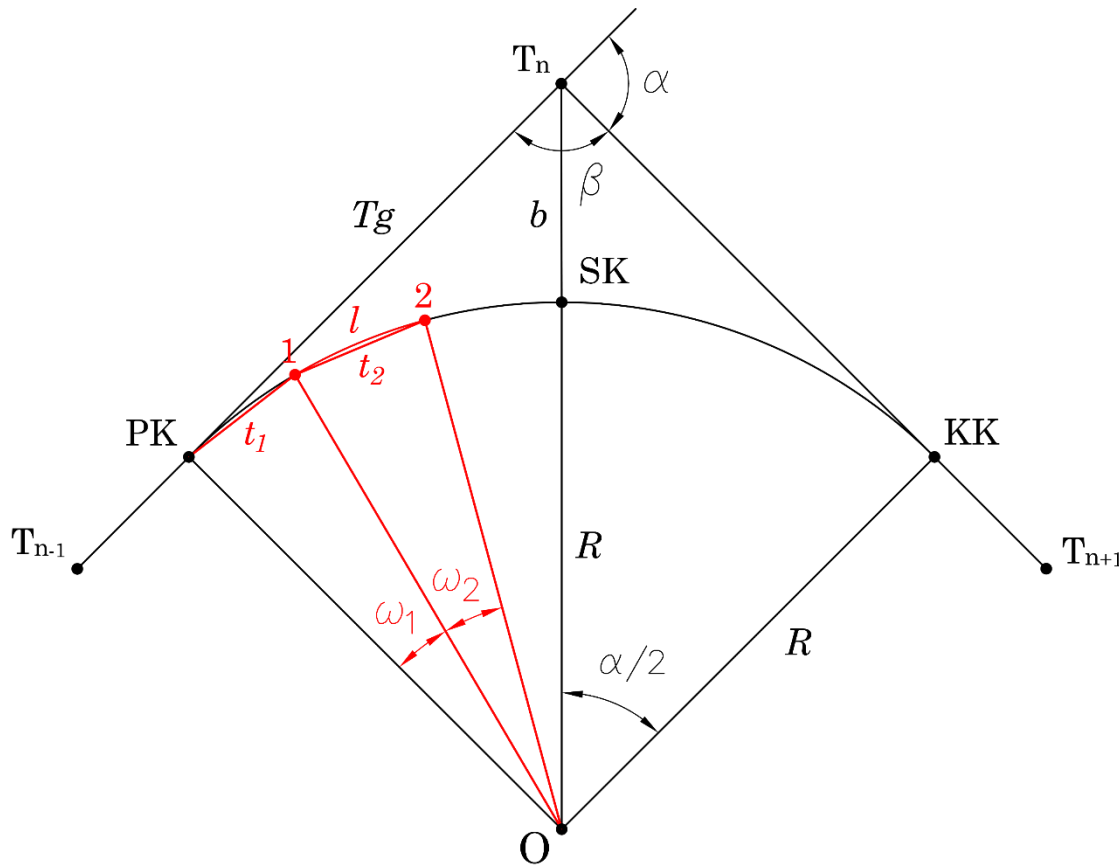
$$Y_O = Y_{T_n} + (R + b) \cdot \sin(v_{T_n}^O)$$

$$X_O = X_{T_n} + (R + b) \cdot \cos(v_{T_n}^O)$$

Geometrija kružne krivine – računanje detaljnih tačaka na osnovu dužine luka

Dato: $R, \alpha, Tg, b, L, t, Y_{PK}, X_{PK}, \dots, Y_O, X_O$.

Nepoznato: $Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_n, X_n$.



Dužina luka l se usvaja.

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{180^\circ \cdot l}{R \cdot \pi}$$

$$Y_1 = Y_O + R \cdot \sin(v_O^{PK} + \omega_1)$$

$$X_1 = X_O + R \cdot \cos(v_O^{PK} + \omega_1)$$

$$Y_2 = Y_O + R \cdot \sin(v_O^{PK} + \omega_1 + \omega_2)$$

$$X_2 = X_O + R \cdot \cos(v_O^{PK} + \omega_1 + \omega_2)$$

Opšti oblik:

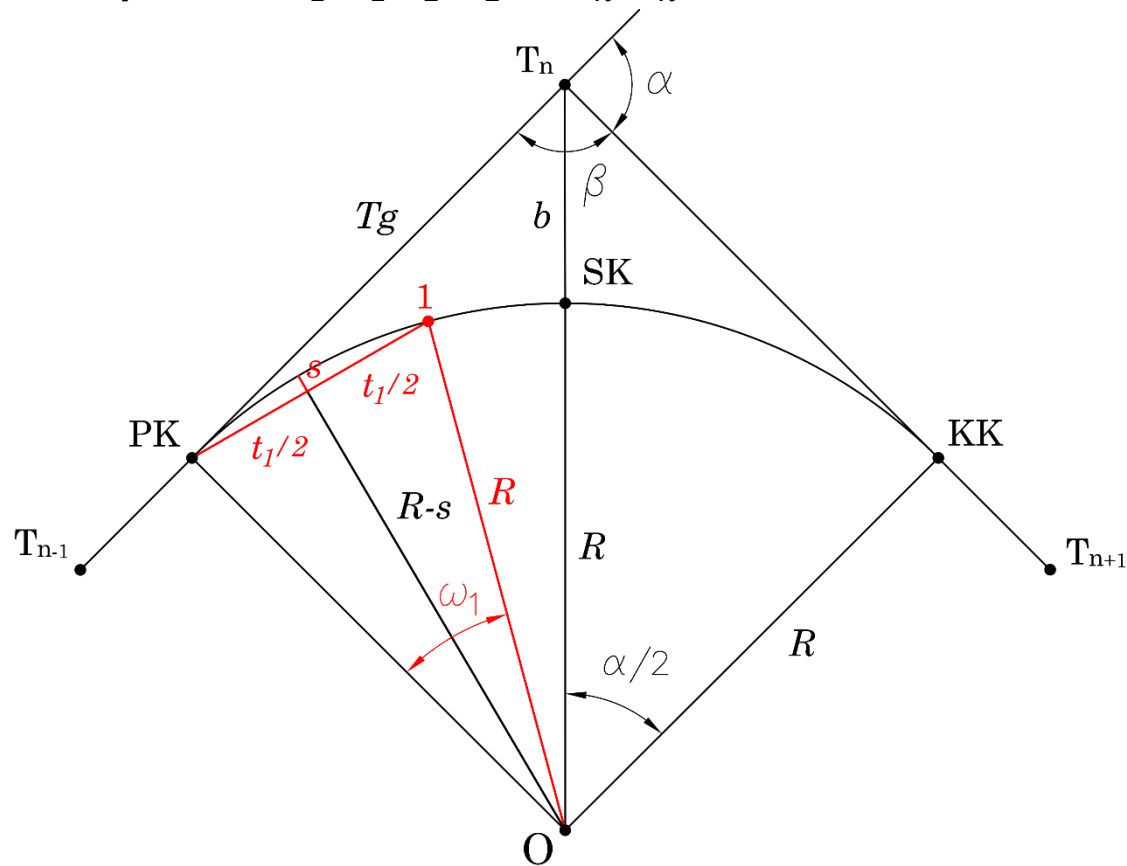
$$Y_i = Y_O + R \cdot \sin(v_O^{PK} + \sum_{j=1}^i \omega_j)$$

$$X_i = X_O + R \cdot \cos(v_O^{PK} + \sum_{j=1}^i \omega_j)$$

Geometrija kružne krivine– računanje detaljnih tačaka na osnovu strele luka

Dato: $R, \alpha, Tg, b, L, t, Y_{PK}, X_{PK}, \dots, Y_0, X_0$.

Nepoznato: $Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_n, X_n$.



Dužina strele luka s se usvaja.

$$\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = R^2 - (R - s)^2$$

$$t_1 = 2 \cdot \sqrt{R^2 - (R - s)^2}$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{t_1}{2 \cdot R}\right)$$

$$Y_1 = Y_0 + R \cdot \sin(v_0^{PK} + \omega_1)$$

$$X_1 = X_0 + R \cdot \cos(\nu_0^{PK} + \omega_1)$$

Opšti oblik:

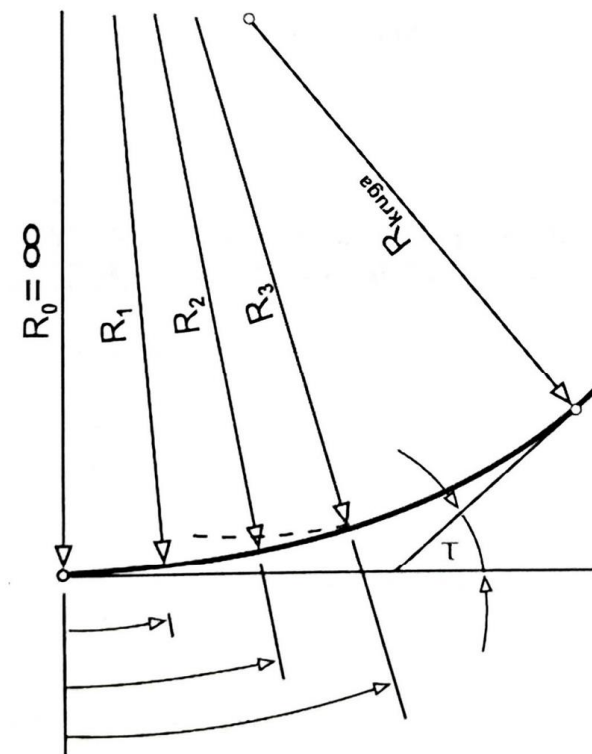
$$Y_i = Y_O + R \cdot \sin(v_O^{PK} + \sum_{j=1}^i \omega_j)$$

$$X_i = X_O + R \cdot \cos(v_O^{PK} + \sum_{j=1}^i \omega_j)$$

PRELAZNE KRIVINE

PRELAZNE KRIVINE

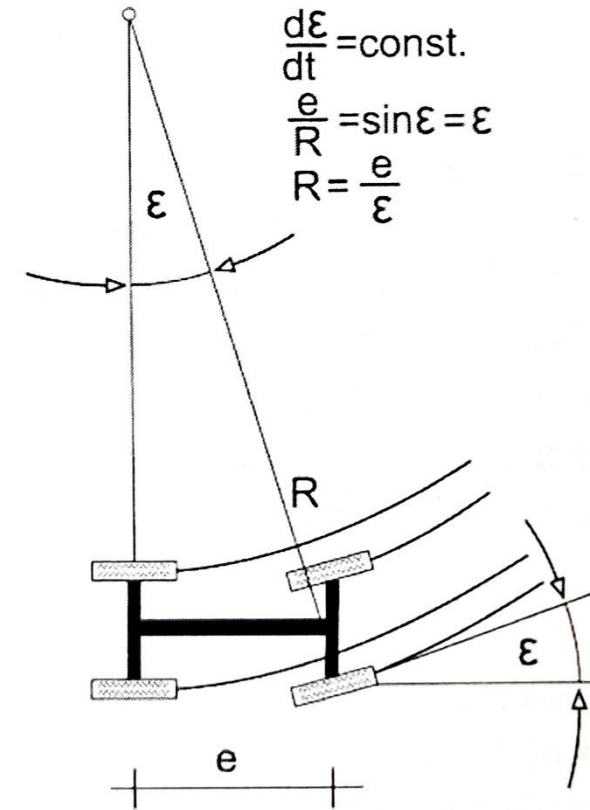
- Prilikom kretanja vozila, usled prelaza iz pravca u krivinu na vozilo deluje centrifugalna sila.
- U cilju redukcije uticaja centrifugalne sile potrebno je postepeno smanjivati polupračnik krivine pomoću odgovarajućih prelaznih krivina.
- Prelazna krivina je je kriva linija koja poluprečnik zakrivljenosti postepeno smanjuje od vrednosti beskonačnosti do vrednosti poluprečnika u delu kružne krivine.



USLOVI PRELAZNIH KRIVINA

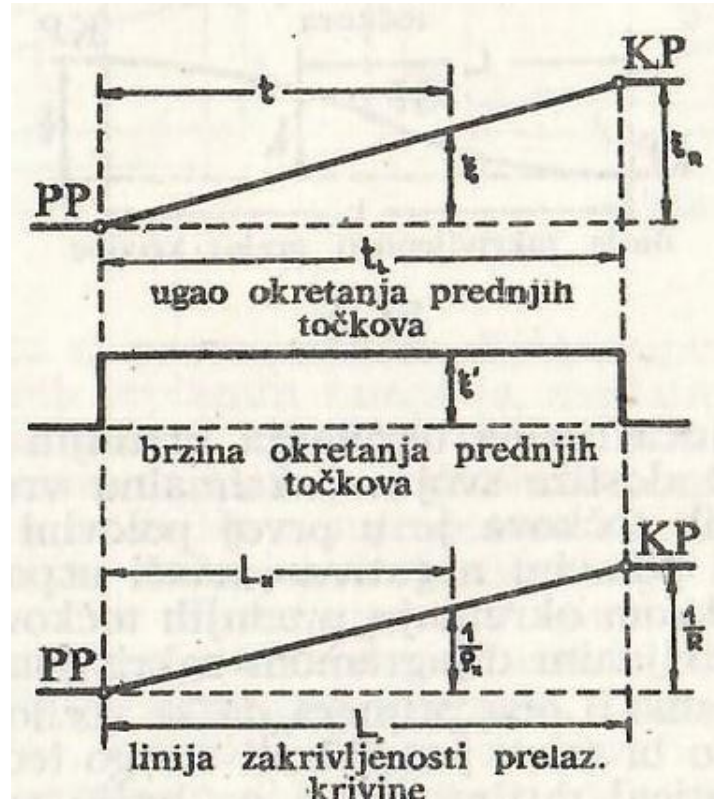
Matematički oblik prelazne krivine treba da zadovolji sledeće uslove:

- linearna promena zakrivljenosti, tj. postepena promena poluprečnika;
- luk kružne i prelazne krivine treba da ima zajedničku tangentu u dodirnoj tački;
- pri konstantnoj brzini vozila brzina okretanja prednjih točkova treba da bude konstantna ($d\varepsilon/dt = \text{const.}$).

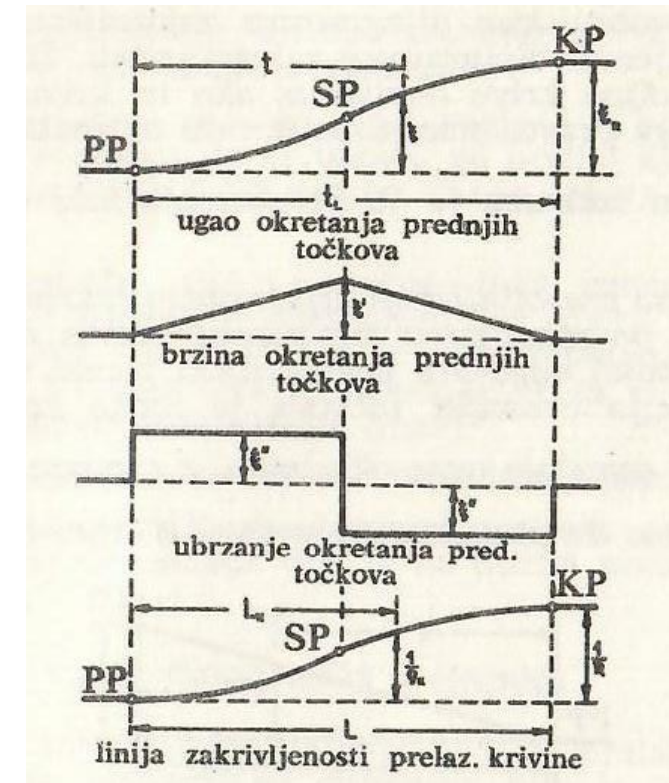


VRSTE PRELAZNIH KRIVINA

Prelaznice sa pravolinijskim diagramom zakrivljenosti



Prelaznice sa krivolinijskim diagramom zakrivljenosti



VRSTE PRELAZNIH KRIVINA

Poluprečnik zakrivljenosti prelaznice se od vrednosti $\rho = \infty$ do vrednosti $\rho = R$ može menjati srazmerno lučnoj dužini krive, apscisi ili tetivi. Prema tome imamo tri vrste prelaznih krivina:

- Klotoida

$$R \cdot L = C$$

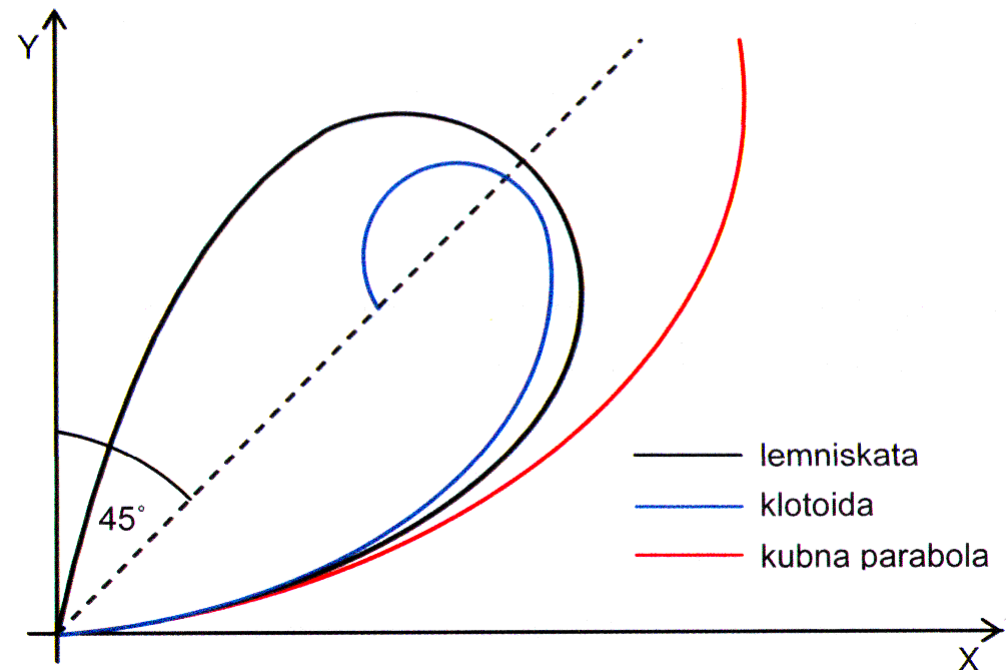
- Kubna parabola

$$R \cdot l_x = C$$

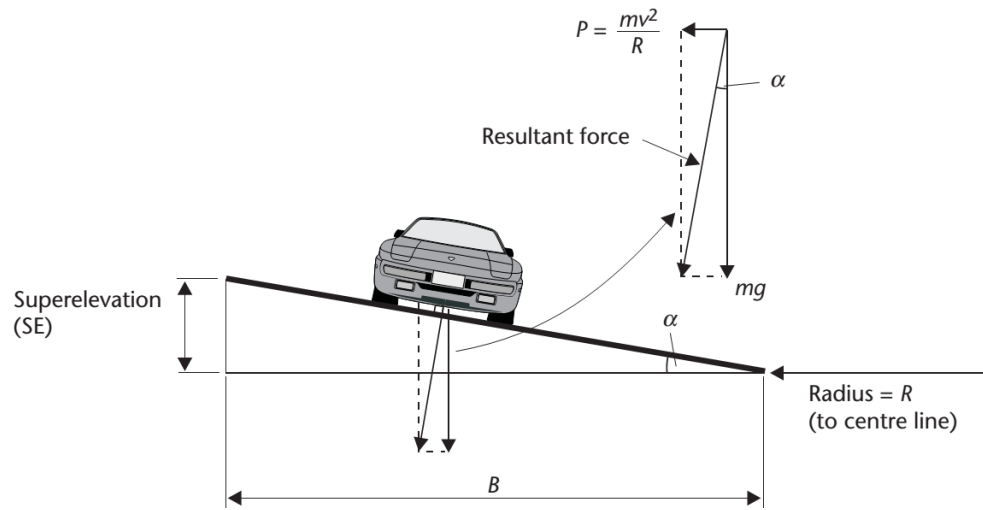
- Lemniskata

$$R \cdot t = C$$

- L – dužina luka do posmatrane tačke
- l_x – dužina luka do posmatrane tačke projektovana na glavnu tangentu – tj. apscisa posmatrane tačke
- t – tetiva
- R – poluprečnik



NADVIŠENJE SPOLJNE IVICE PUTA - VITOPERENJE



$$\tan \alpha = \frac{mv^2 / R}{mg} = \frac{v^2}{gR}$$

$$SE = B \tan \alpha$$

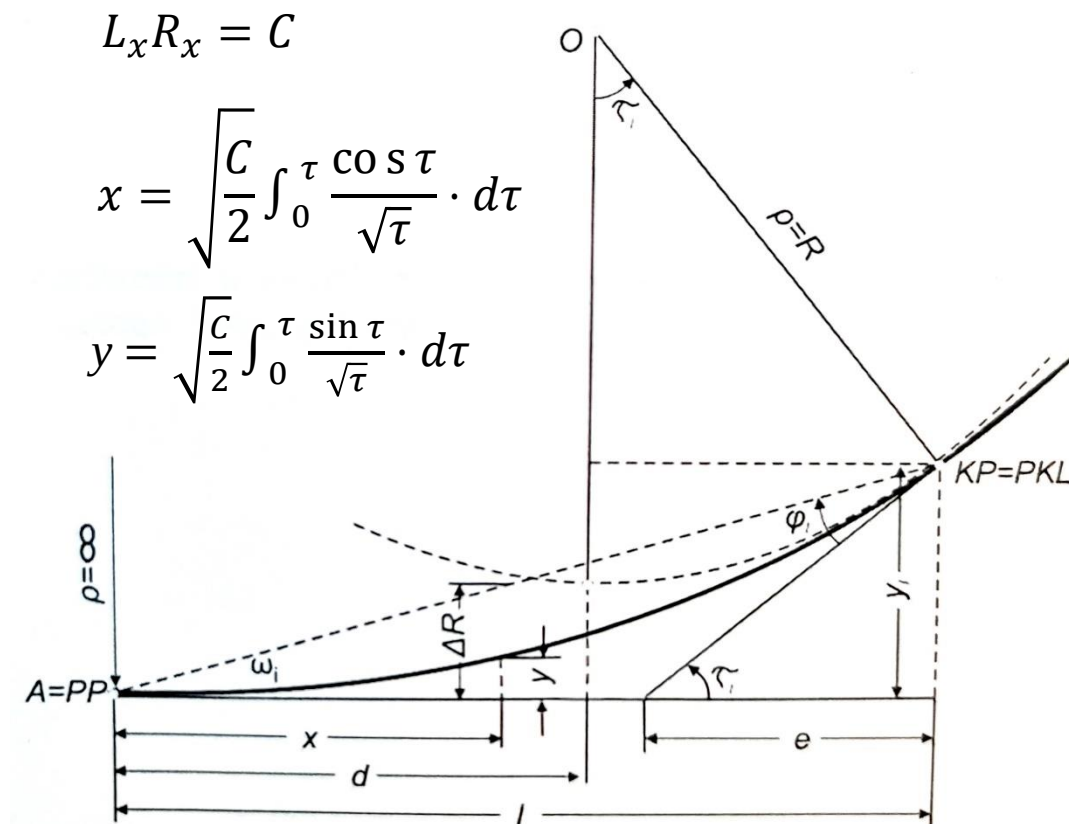
$$\text{maximum theoretical SE} = \left(\frac{Bv^2}{gR} \right) \text{ where } v \text{ is in m s}^{-1}$$

- Nagib krivine (vitoperenje - superelevacija) obično treba da uravnoteži samo 45% radijalne sile P .
- U ruralnim područjima, nagib krivine ne bi trebalo da prelazi 7% (približno 1:14,5) i, gde god je moguće, radijusi bi trebalo da se biraju tako da nagib ostane unutar poželjne vrednosti od 5% (1:20).
- U urbanim područjima sa raskrsnicama u nivou i bočnim prilazima, nagib krivine treba ograničiti na 5%.
- Minimalno dozvoljena vrednost nagiba krivine, radi obezbeđenja drenaže, iznosi 2,5% (1:40)

- Jednačina klotoide obično se prikazuje u parametarskom obliku:
- $R \cdot L = C = A^2$,
gde je A linearni parametar koji definiše veličinu klotoide.
- Proizvod dužine luka i poluprečnika klotoide konstantan je u svakoj tački.

GLAVNI ELEMENTI KLOTOIDE

- R – poluprečnik kružnog luka
- L – dužina luka krive
- l_x – apscisa tačke KP
- y_l – ordinata tačke KP
- d – udaljenost PP od teorijskog početka kružne krivine.
- ΔR – kružni pomak
- e – veličina subtangente
- τ_l – ugao između tangente u tački KP i glavne tangente
- ω_l – ugao između tangente i tetive
- φ_l – ugao između tangente u tački KP i tetive



KLOTOIDA

Ukoliko pretpostavimo da je rastojanje između tačka M i N na klotoidi dovoljno malo da je poluprečnik krivine ρ u obe tačke isti, može se napisati sledeće:

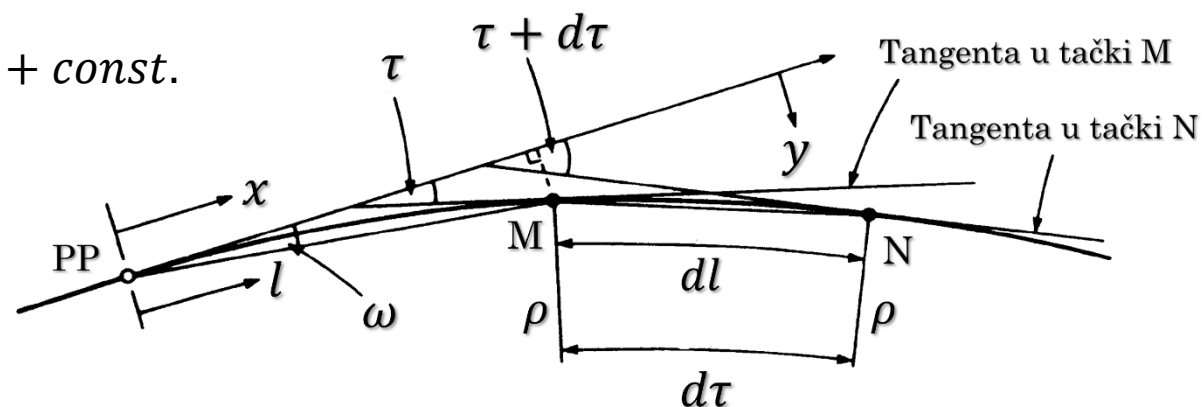
$$dl = \rho \cdot d\tau, \rho \cdot l = C \Rightarrow d\tau = \frac{l}{C} \cdot dl \Rightarrow \tau = \frac{l^2}{2C} + const.$$

Upotrebom graničnih uslova dobija se:

$$l = 0, \tau = 0 \Rightarrow const = 0,$$

$$\tau = \frac{l^2}{2RL}, \tau_l = \frac{L^2}{2RL} = \frac{L}{2R}.$$

- l – rastojanje od posmatrane tačke do početka krivine
- ρ – poluprečnik krivine u proizvoljnoj tački
- τ – ugao između glavne tangente i tangente u proizvoljnoj tački krive
- Budući da su tačke M i N na veoma malom rastojanju može se pretpostaviti da je ρ ima istu vrednost u obe tačke (M i N).



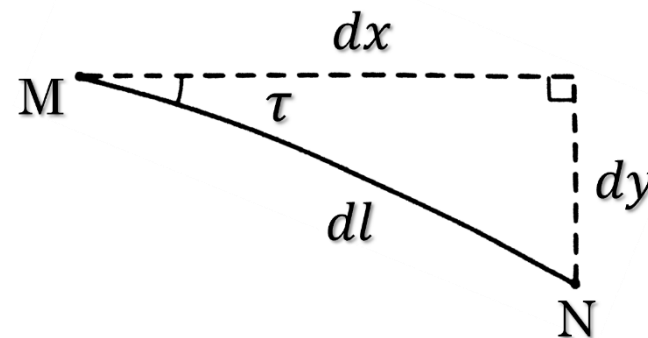
KLOTOIDA

Budući da su tačke M i N veoma bliske, može se pretpostaviti da je dužina luka dl jednaka dužini tetive između tačaka M i N, na osnovu čega se mogu napisati sledeći izrazi:

$$dx = dl \cdot \cos(\tau), \quad dy = dl \cdot \sin(\tau),$$

odnosno

$$x = \int \cos(\tau) dl, \quad y = \int \sin(\tau) dl.$$



Razvojem u red trigonometrijskih funkcija pod integralom i rešavanjem integrala dobijaju se odgovarajući izrazi za računanje pravouglih koordinata tačaka klotoide.

Elementi klotoide određuje se pomoću sledećih formula:

$$l_x = L \cdot \left[1 - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{L}{2R} \right)^2 + \frac{1}{216} \cdot \left(\frac{L}{2R} \right)^4 - \dots \right],$$

$$y_l = \frac{L^2}{6R} \cdot \left[1 - \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{L}{2R} \right)^2 + \frac{1}{440} \cdot \left(\frac{L}{2R} \right)^4 - \dots \right],$$

$$\tau_l = \frac{L}{2R} = \left(\frac{L}{2R} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \right)^\circ, \quad \Delta R = y_l - (R - R \cdot \cos(\tau_l)),$$

$$e = y_l \cdot \operatorname{ctg}(\tau_l), \quad d = l_x - R \cdot \sin(\tau_l),$$

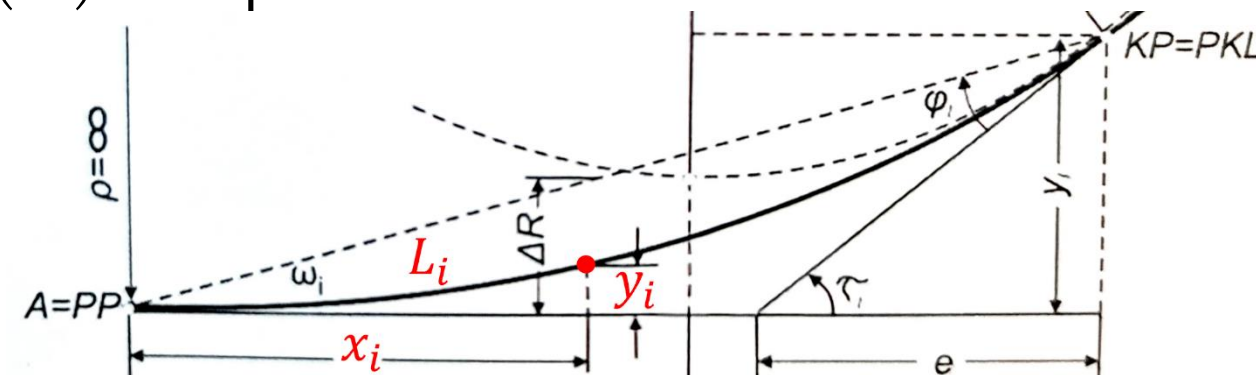
$$\omega_l = \operatorname{arctg}(y_l/l_x), \quad 180^\circ - \omega_l - \varphi_l = 180^\circ - \tau_l \Rightarrow \varphi_l = \tau_l - \omega_l.$$

KLOTOIDA

Pravouglo koordinate tačke i na proizvoljnoj udaljenosti L_i od početka klotoide računaju se na sledeći način:

$$x_i = L_i \cdot \left[1 - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{L_i^2}{2C} \right)^2 + \frac{1}{216} \cdot \left(\frac{L_i^2}{2C} \right)^4 - \dots \right],$$

$$y_i = \frac{L_i^3}{6C} \cdot \left[1 - \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{L_i^2}{2C} \right)^2 + \frac{1}{440} \cdot \left(\frac{L_i^2}{2C} \right)^4 - \dots \right].$$



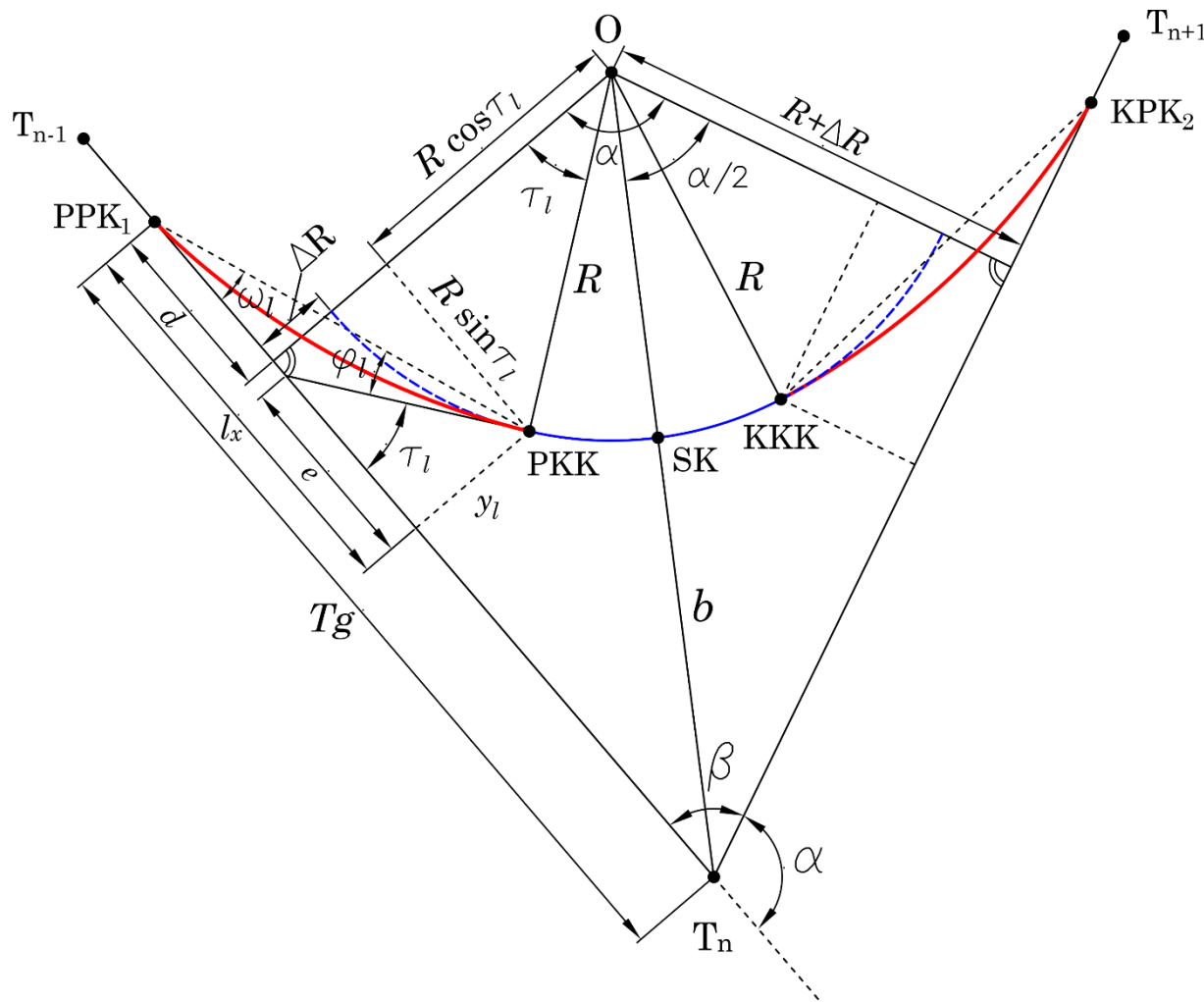
Klotoida kao prelazna krivina može se pojaviti u sledećim slučajevima:

- **uzastopna prelazna krivina između dva pravca;**
- **prelazna krivina između pravca i kružnog luka;**
- **prelazna krivina između dva kruga istih smerova;**
- **prelazna krivina između dva kruga suprotnih smerova.**

Klotoida se pojavljuje u nekoliko različitih oblika:

- **simetrična prelazna krivina oblika klotoida;**
- **asimetrična prelazna krivina oblika klotoida;**
- **temena simetrična prelazna krivina oblika klotoida;**
- **temena asimetrična prelazna krivina oblika klotoida.**

SIMETRIČNA PRELAZNA KRIVINA OBLIKA KLOTOIDE



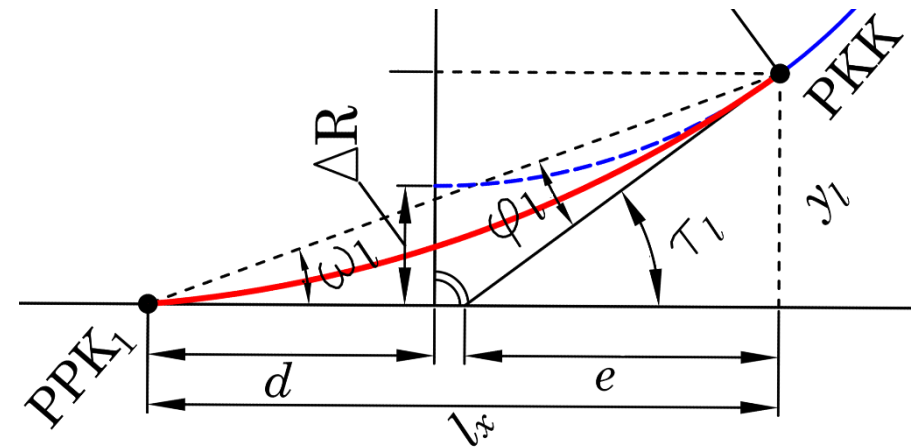
$$L_1 = L_2 = L$$

$$\tau_{l1} = \tau_{l2} = \tau_l$$

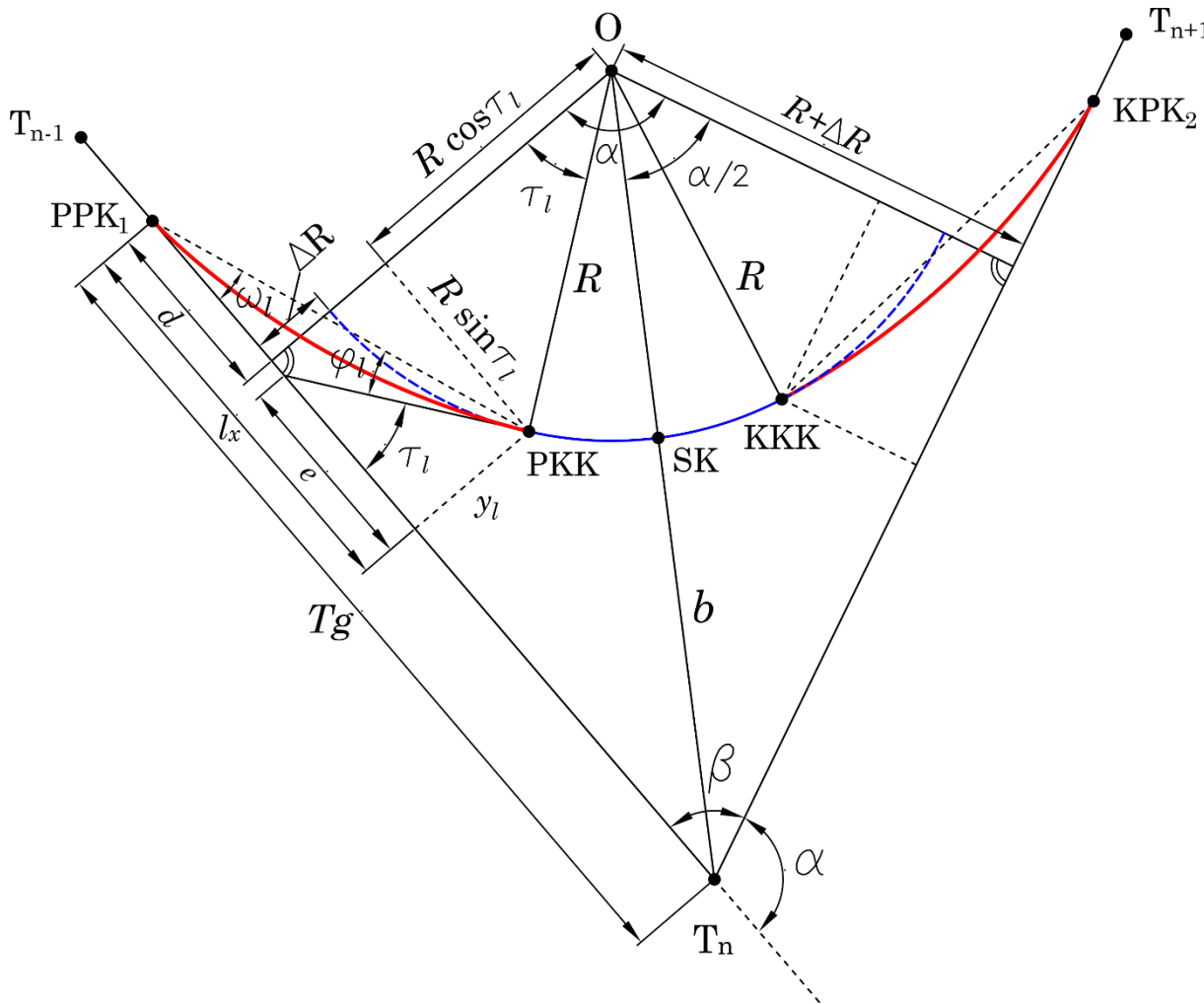
$$\alpha > 2\tau_l$$

Dato: R, L, α .

Nepoznato: $l_x, y_l, d, \Delta R, e, \tau_l, \omega_l, \phi_l, \beta, b, Tg, D$.



SIMETRIČNA PRELAZNA KRIVINA OBLIKA KLOTOIDE



Elementi klotoide: $l_x, y_l, d, \Delta R, e, \tau_l, \omega_l, \varphi_l$ određuju se na osnovu prethodno prikazanih formula.

Nakon toga, određuju se sledeći elementi:

$$Tg = (R + \Delta R) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d,$$

$$b = \frac{R + \Delta R}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - R, \beta = 180^\circ - \alpha,$$

$$D = R \cdot \pi \cdot \frac{\alpha - 2\tau_l}{180^\circ} + 2L.$$

ODREĐIVANJE KOORDINATA GLAVNIH TAČKA

Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$ i glavni elementi prelazne krivine.

Nepoznato: $Y_{PPK_1}, X_{PPK_1}, Y_{KPK_1}, X_{KPK_1}, Y_{PKK}, X_{PKK}, \dots, Y_{KPK_2}, X_{KPK_2}, Y_O, X_O$.

$$Y_{PPK_1} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n-1}}\right), \quad X_{PPK_1} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n-1}}\right)$$

$$Y_{KPK_2} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n+1}}\right), \quad X_{KPK_2} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n+1}}\right)$$

$$Y_{SK} = Y_{T_n} + b \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2\right), \quad X_{SK} = X_{T_n} + b \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2\right)$$

$$Y_O = Y_{T_n} + (R + b) \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2\right), \quad X_O = X_{T_n} + (R + b) \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2\right)$$

ODREĐIVANJE KOORDINATA GLAVNIH TAČKA

Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$ i glavni elementi prelazne krivine.

Nepoznato: $Y_{PPK_1}, X_{PPK_1}, Y_{KPK_1}, X_{KPK_1}, Y_{PKK}, X_{PKK}, \dots, Y_{KPK_2}, X_{KPK_2}, Y_O, X_O$.

$$Y_{KPK_1} \equiv Y_{PKK} = Y_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n-1}}\right) + y_l \cdot \sin\left(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$

$$X_{KPK_1} \equiv X_{PKK} = X_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n-1}}\right) + y_l \cdot \cos\left(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$

$$Y_{PPK_2} \equiv Y_{KKK} = Y_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \sin\left(v_{T_n}^{T_{n+1}}\right) + y_l \cdot \sin\left(v_{T_{n+1}}^{T_n} + 90^\circ\right)$$

$$X_{PPK_2} \equiv X_{KKK} = X_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \cos\left(v_{T_n}^{T_{n+1}}\right) + y_l \cdot \cos\left(v_{T_{n+1}}^{T_n} + 90^\circ\right)$$

ODREĐIVANJE KOORDINATA DETALJNIH TAČAKA

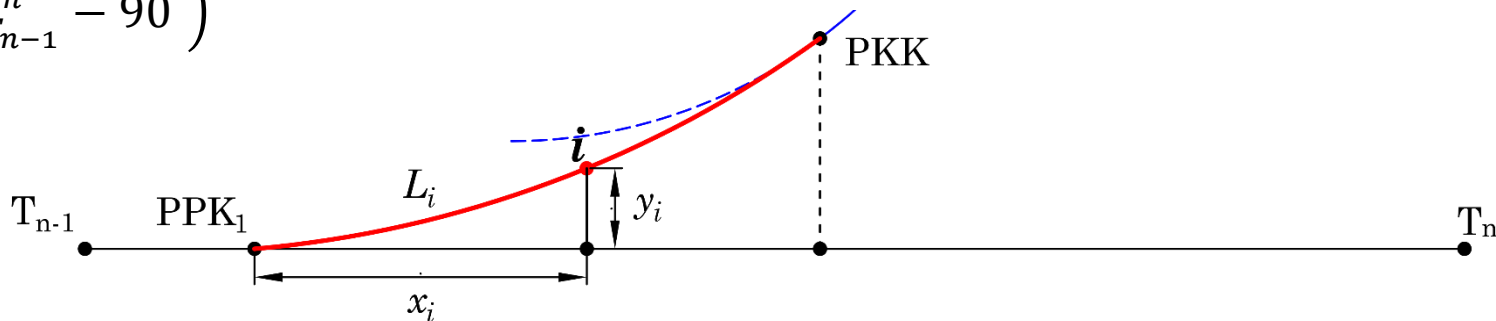
Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$, glavni elementi i koordinate glavnih tačaka simetrične prelazne krivine oblika klotoide.

Nepoznato: $Y_1, X_2, Y_2, X_2, \dots, Y_n, X_n$.

Pravougle koordinate, odnosno apscise x_i i ordinate y_i , detaljnih tačaka određuju se na osnovu prethodno prikazanih formula.

$$Y_i = Y_{PPK_1} + x_i \cdot \sin\left(\nu_{T_{n-1}}^{T_n}\right) + y_i \cdot \sin\left(\nu_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$

$$X_i = X_{PPK_1} + x_i \cdot \cos\left(\nu_{T_{n-1}}^{T_n}\right) + y_i \cdot \cos\left(\nu_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$

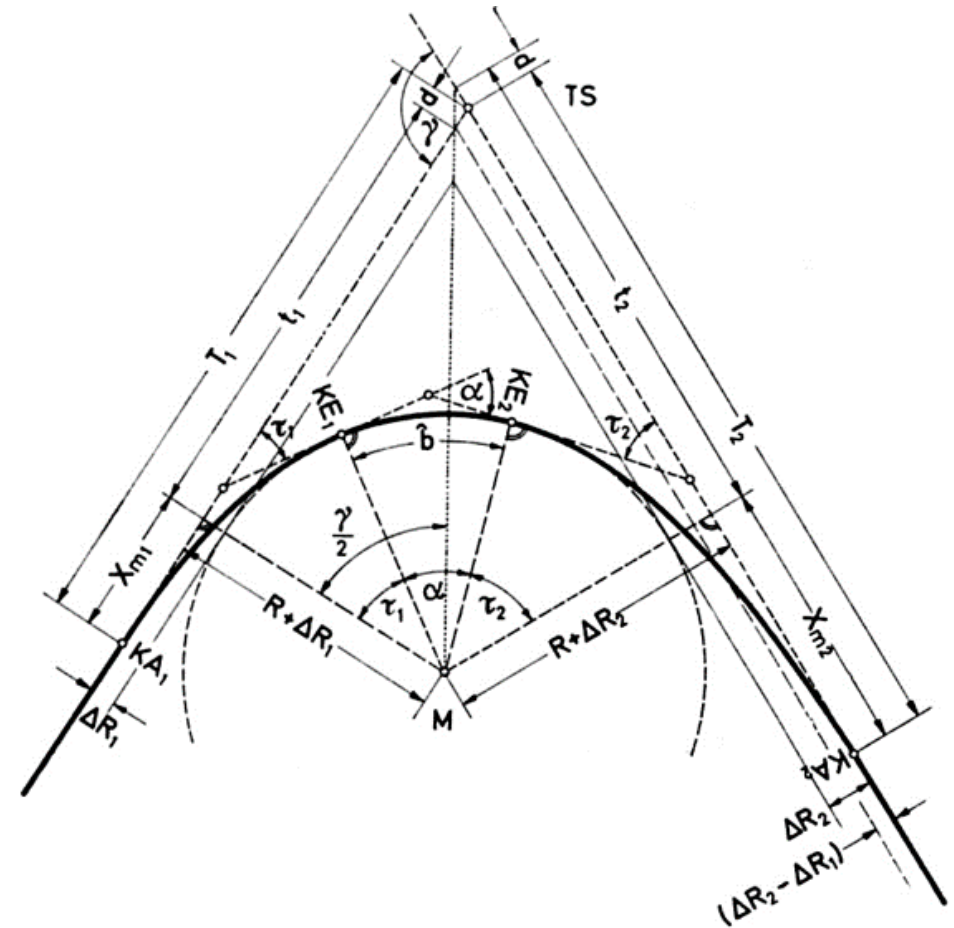


ASIMETRIČNA PRELAZNICA OBLIKA KLOTOIDE

- Dužine prelaznih krivina su različite, $L_1 \neq L_2$.
- Postoji kružni luk dužine b između prelaznih krivina.
- Vrednost skretnog ugla γ veća je od zbira $\tau_1 + \tau_2$ ($\tau_1 \neq \tau_2$).

Dato: R, L_1, L_2, γ .

Nepoznato: elementi klotoide za oba luka, koordinate glavnih i detaljnih tačaka krivine.



SIMETRIČNA TEMENA PRELAZNICA OBLIKA KLOTOIDE

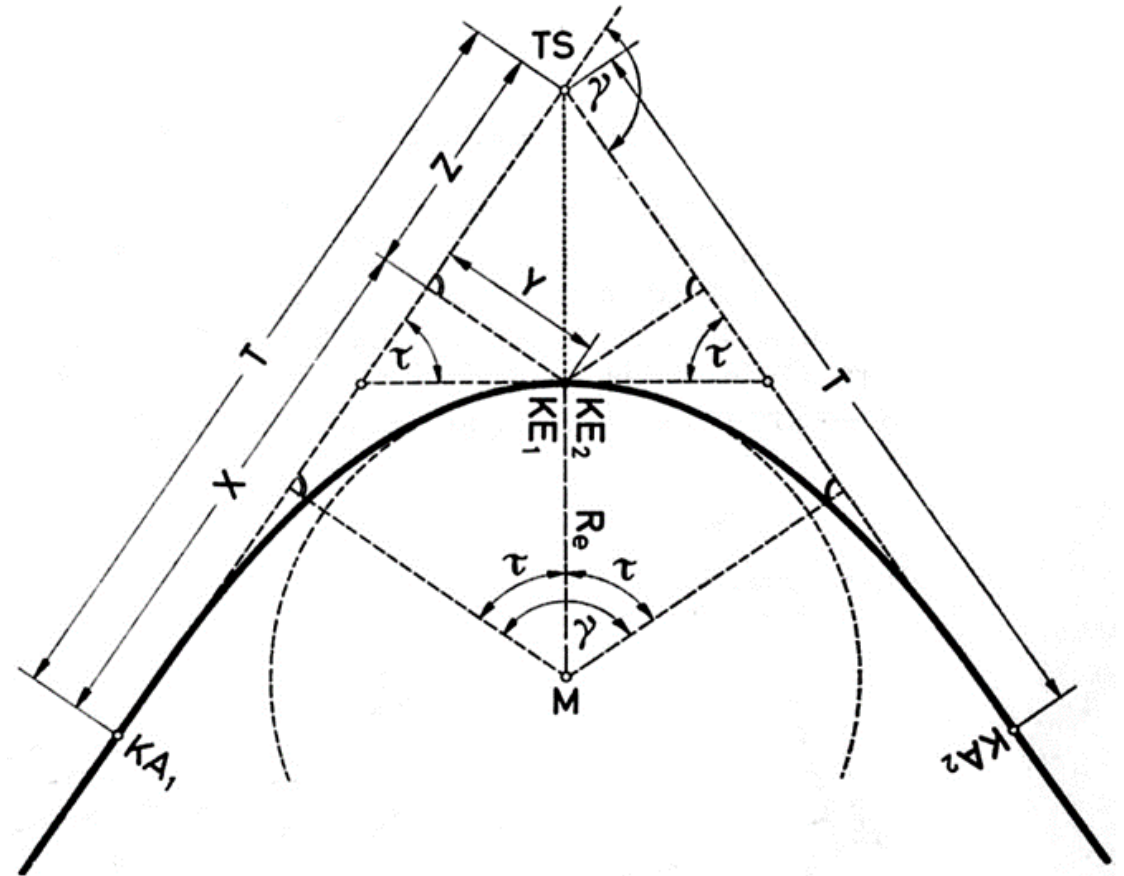
Dužine prelaznih krivina su iste, $L_1 = L_2 = L$.

Kružni luk između prelaznih krivina ne postoji.

Vrednost skretnog ugla γ iznosi 2τ ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$).

Dato: R_e, L, γ .

Nepoznato: elementi klotoide, koordinate glavnih i detaljnih tačaka krivine.

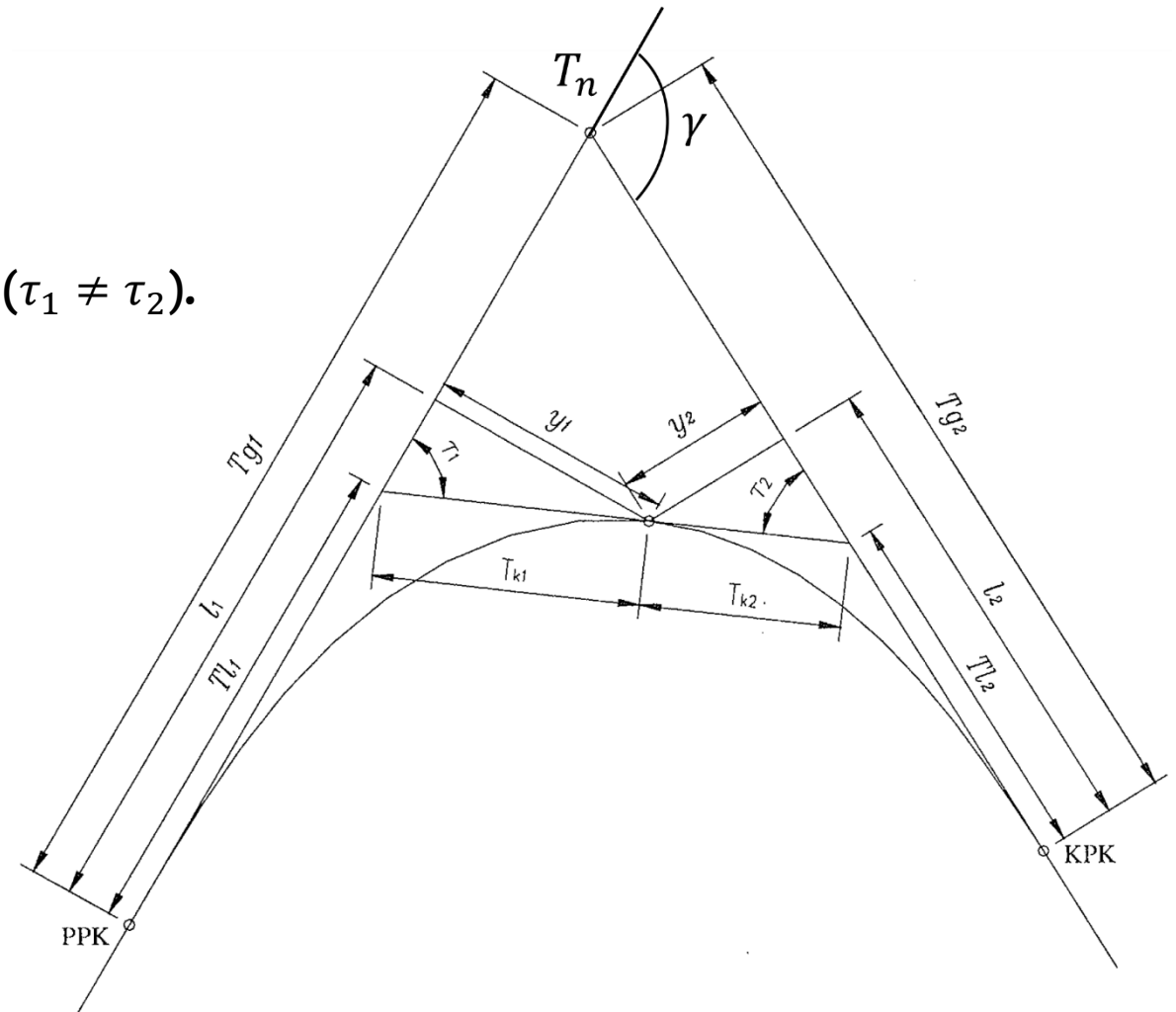


ASIMETRIČNA TEMENA PRELAZNICA OBLIKA KLOTOIDE

- Dužine prelaznih krivina su različite, $L_1 \neq L_2$.
- Kružni luk između prelaznih krivina ne postoji.
- Vrednost skretnog ugla γ jednaka je zbiru $\tau_1 + \tau_2$ ($\tau_1 \neq \tau_2$).

Dato: R, L_1, L_2, γ .

Nepoznato: elementi klotoide za oba luka,
koordinate glavnih i detaljnih tačaka krivine.



KUBNA PARABOLA

Za razliku od klotoide, kubna parabola nije prava spirala i zbog toga se ne može uvek koristiti. Međutim, ona vrlo blisko aproksimira spiralu u određenom opsegu, a prednost njenog jednostavnijeg izraza u odnosu na klotoidu, koji olakšava proračune, dovela je do njene široke primene. U praksi, za dužine na kojima se obično koristi, može se smatrati identičnom klotoidi, čije su formule izvedene uz određene pretpostavke.

KUBNA PARABOLA

- Jednačina kubne parabole izvodi se iz jednačine klotoide uvođenjem sledećih aproksimacija:

$$\cos(\tau) = 1, \quad \sin(\tau) = \tau.$$

- Na osnovu navedenog može se napisati

$$x = \int \cos(\tau) dl = \int 1 dl = l,$$

$$y = \int \sin(\tau) dl = \int \tau dl = \int \frac{l^2}{2RL} dl = \frac{l^3}{6RL} = \frac{x^3}{6RL}.$$

KUBNA PARABOLA

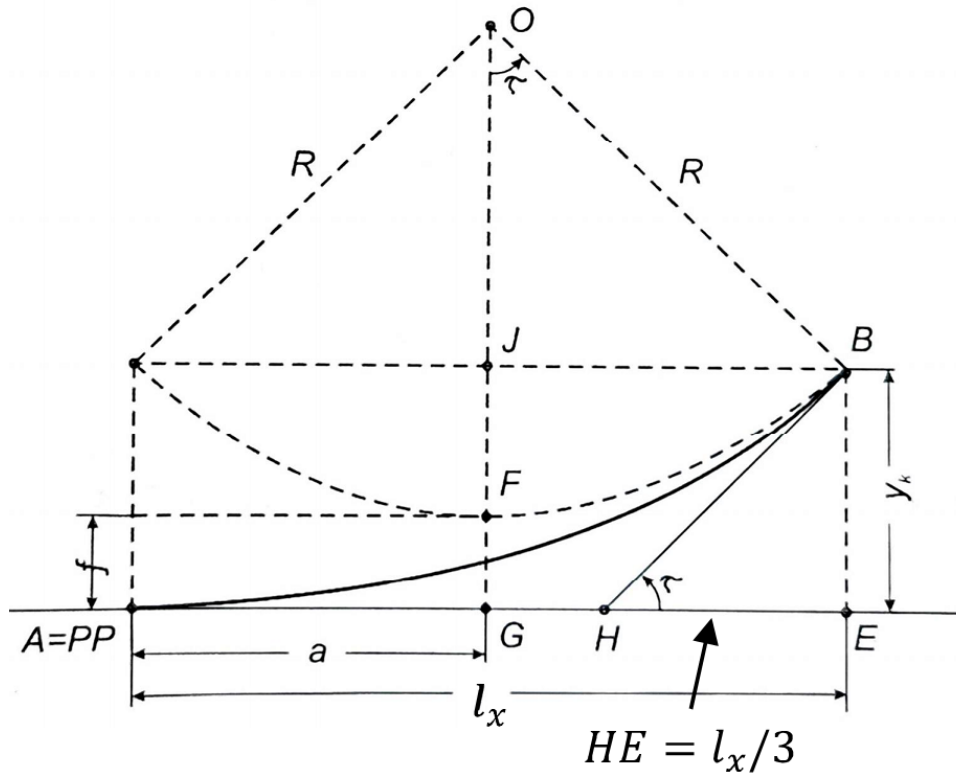
- Sa porastom dužine kubne parabole, povećava se vrednost ugla τ , tako da ova aproksimacija dovodi do neprihvatljivog odstupanja sračunate vrednosti ordinate y_l na kraju prelazne krivine.
- Shodno tome, u praksi se koristi formula za prostu kubnu parabolu

$$y = m \cdot x^3 = \frac{1}{6 \cdot R \cdot l_x} \cdot x^3 \quad \text{za} \quad L \leq \frac{R}{3.5},$$

gde je m parametar kubne parabole, l_x apscisa krajnje tačke prelazne krivine, R poluprečnik krivine, a x i y apscisa i ordinata proizvoljne tačke na prelaznoj krivini.

ELEMENTI KUBNE PARABOLE

$$R \cdot l_x = C = \text{const.}$$



Područje primene kubne parabole
je od $\tau_l = 0^\circ$ do $\tau_l = 24^\circ 05' 41''$.

PP – početak prelazne krivine

KP $\equiv$ B – kraj prelazne krivine

R – poluprečnik kružnog luka

l_x – apscisa tačke KP $\equiv$ B

y_l – ordinata tačke KP $\equiv$ B

a – udaljenost PP od teorijskog
početka kružnog luka

f – pomak kružnog luka zbog
umetanja prelazne krivine

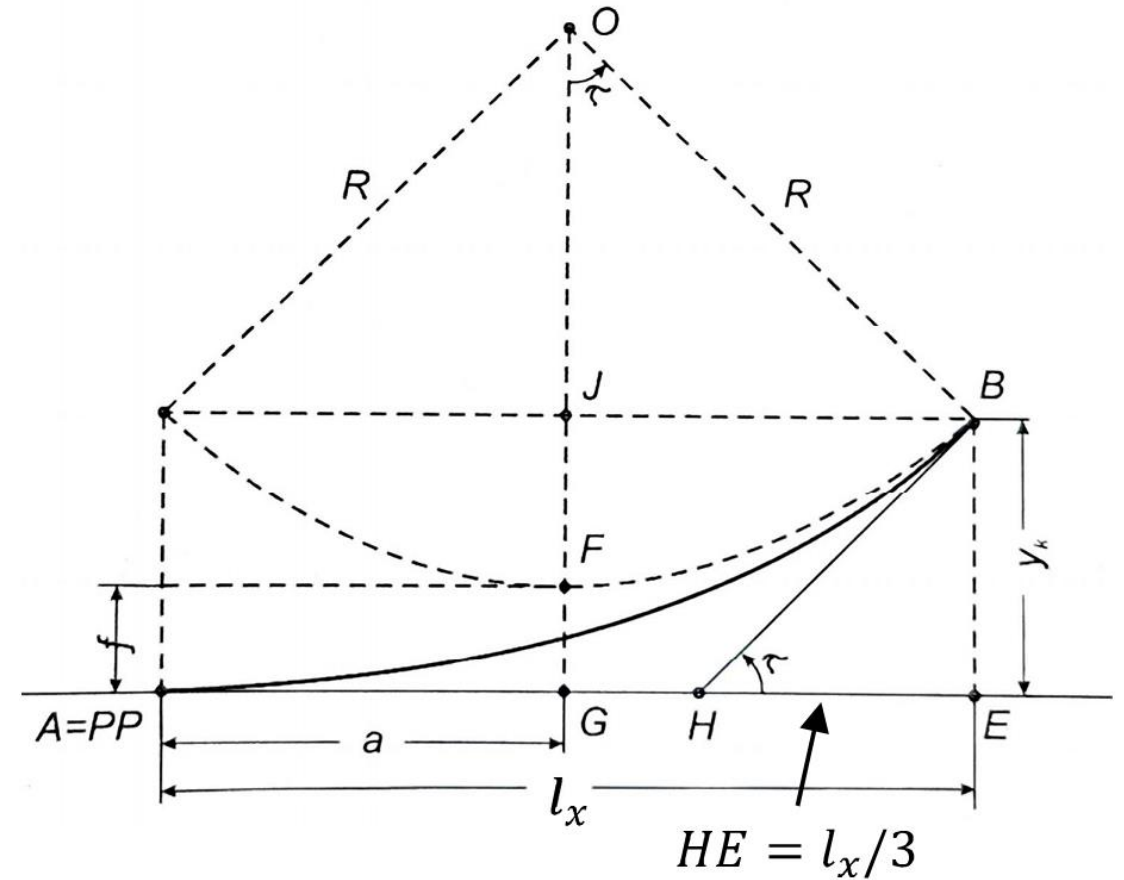
τ_l – ugao između tangente u
tački KP $\equiv$ B i glavne tangente

ODREĐIVANJE ELEMENATA KUBNE PARABOLE

$$l_x = L - \frac{L}{10} \cdot \left(\frac{L}{2R} \right)^2, \quad y_l = \frac{l_x^2}{6R}$$

$$\tau_l = \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \cdot y_l}{l_x} \right), \text{ odnosno } \tau_l = \operatorname{arctg} \left(\frac{l_x}{2R} \right)$$

$$a = l_x - R \cdot \sin(\tau_l), \quad f = y_l - R(1 - \cos(\tau_l))$$



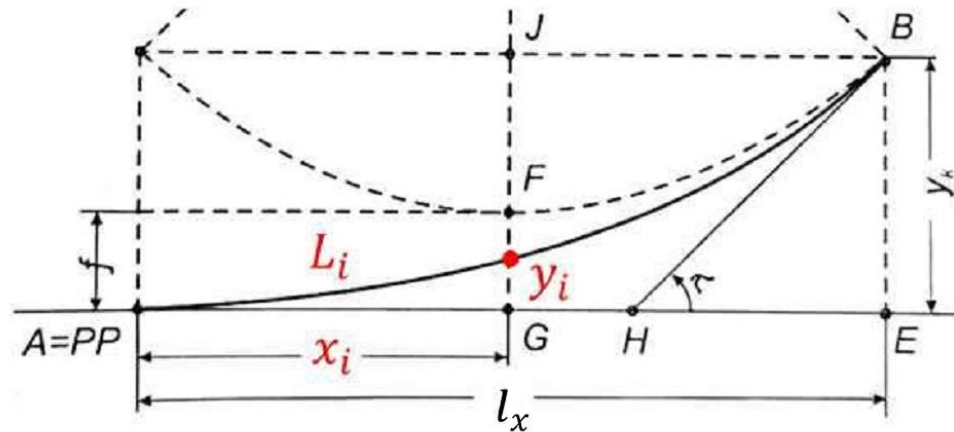
ODREĐIVANJE KOORDINATA DETALJNIH TAČKA

- Pravougle koordinate tačke i na proizvoljnoj udaljenosti L_i od početka parabole računaju se na sledeći način:

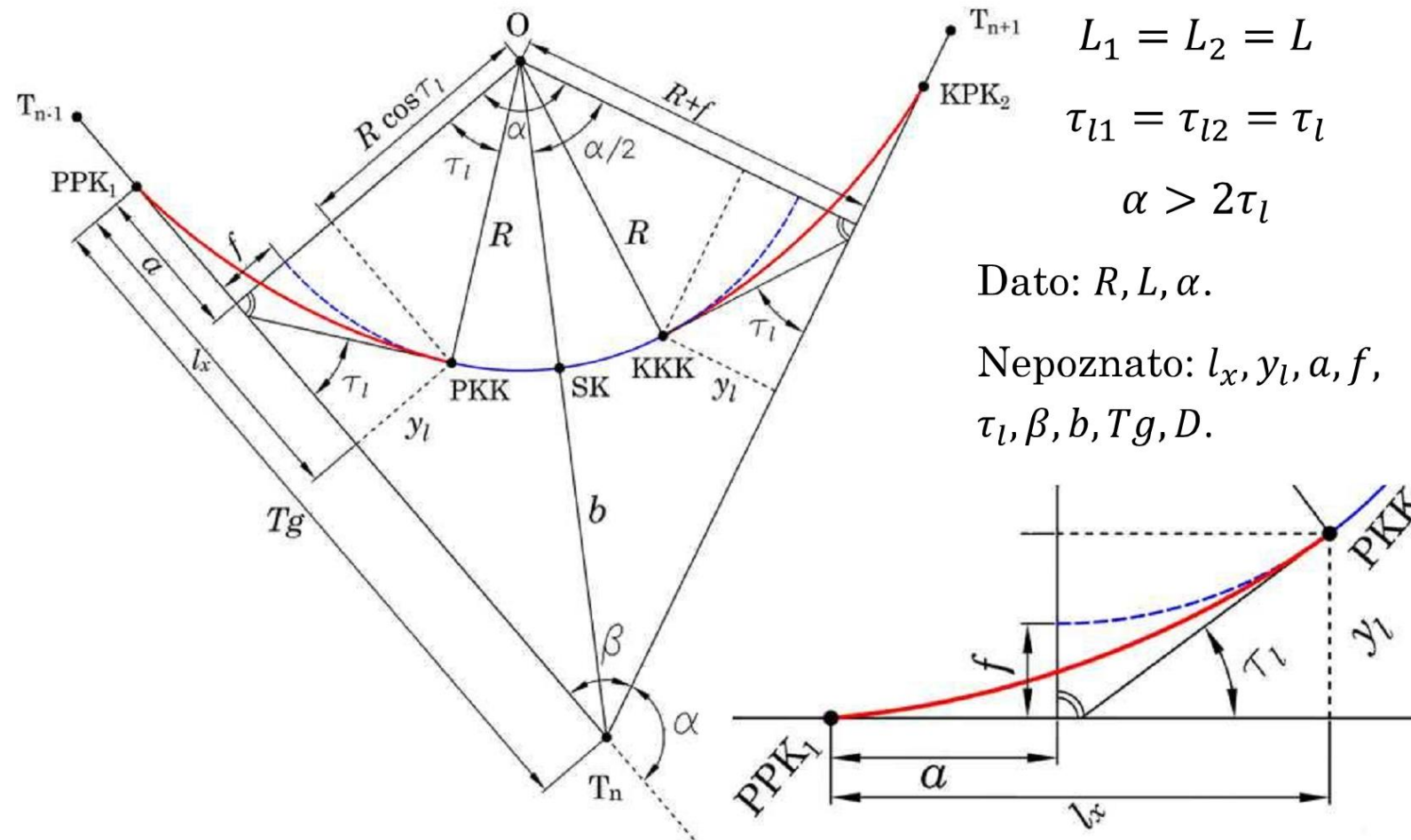
$$x_i = L_i - \frac{L_i}{10} \cdot \left(\frac{L_i}{2R} \right)^2,$$

$$y_i = \frac{x_i^3}{6Rl_x} \quad \text{za } L \leq \frac{R}{3.5},$$

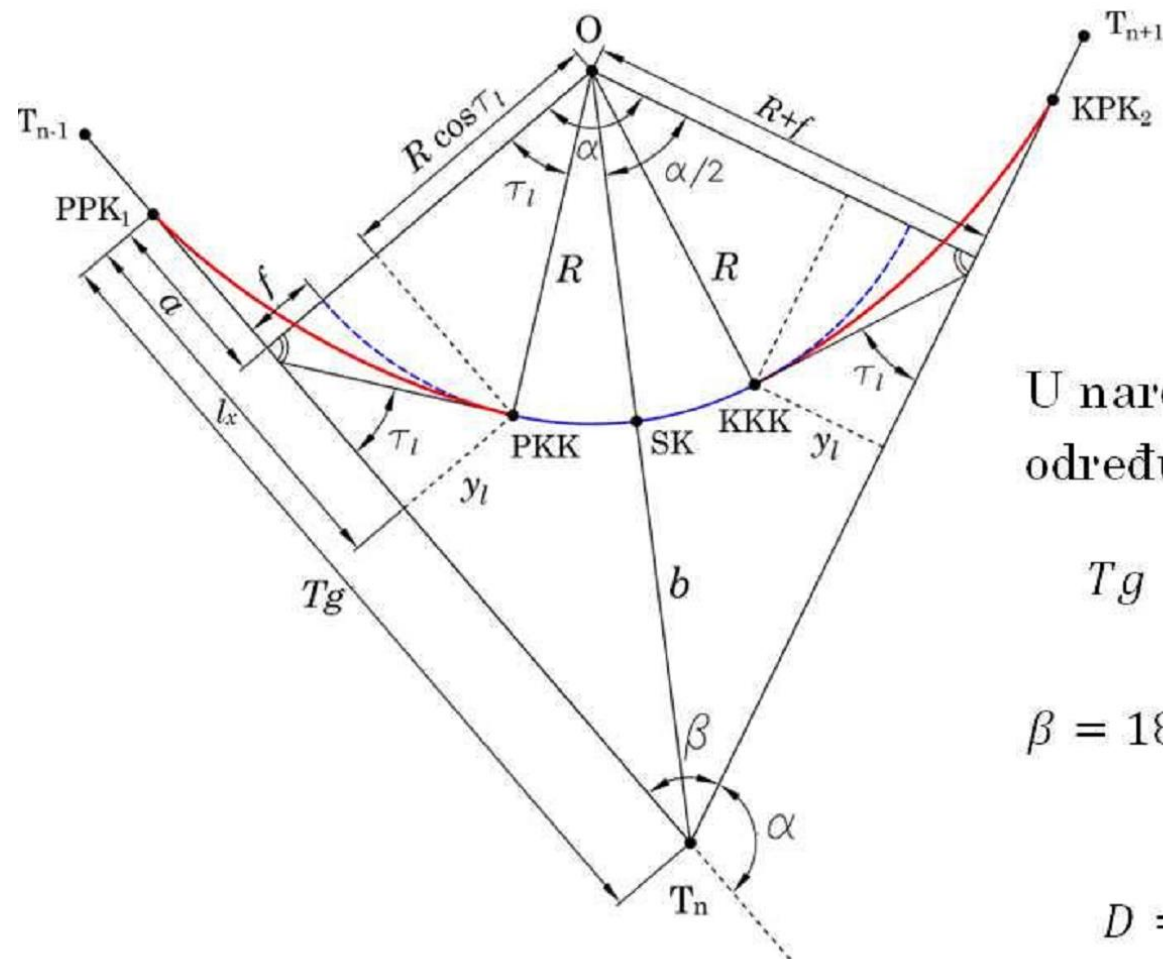
$$y_i = \frac{\left(1 + \left(\frac{l_x}{2R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{6Rl_x} \cdot x_i^3 \quad \text{za } L > \frac{R}{3.5}.$$



SIMETRIČNA PRELAZNA KRIVINA OBLIKA KUBNE PARABOLE



ODREĐIVANJE ELEMENATA SIMETRIČNE PRELAZNE KRIVINE OBLIKA KUBNE PARABOLE



Elementi kubne parabole l_x, y_l, a, f, τ_l određuju se pomoću prethodno prikazanih formula.

U narednom koraku određuju se sledeći elementi:

$$Tg = (R + f) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + a,$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha, b = \frac{R + f}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} - R,$$

$$D = R \cdot \pi \cdot \frac{\alpha - 2\tau_l}{180^\circ} + 2L.$$

ODREĐIVANJE KOORDINATA GLAVNIH TAČAKA SIMETRIČNE PRELAZNE KRIVINE

OBLIKA KUBNE PARABOLE

Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$ i glavni elementi prelazne krivine.

Nepoznato: $Y_{PPK_1}, X_{PPK_1}, Y_{KPK_1}, X_{KPK_1}, Y_{PKK}, X_{PKK}, \dots, Y_{KPK_2}, X_{KPK_2}, Y_O, X_O$.

$$Y_{PPK_1} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n-1}}), \quad X_{PPK_1} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n-1}})$$

$$Y_{KPK_2} = Y_{T_n} + Tg \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n+1}}), \quad X_{KPK_2} = X_{T_n} + Tg \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n+1}})$$

$$Y_{SK} = Y_{T_n} + b \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2), \quad X_{SK} = X_{T_n} + b \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2)$$

$$Y_O = Y_{T_n} + (R + b) \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2), \quad X_O = X_{T_n} + (R + b) \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n-1}} + \beta/2)$$

$$Y_{KPK_1} \equiv Y_{PKK} = Y_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n-1}}) + y_l \cdot \sin(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ)$$

$$X_{KPK_1} \equiv X_{PKK} = X_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n-1}}) + y_l \cdot \cos(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ)$$

$$Y_{PPK_2} \equiv Y_{KKK} = Y_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \sin(v_{T_n}^{T_{n+1}}) + y_l \cdot \sin(v_{T_{n+1}}^{T_n} + 90^\circ)$$

$$X_{PPK_2} \equiv X_{KKK} = X_{T_n} + (Tg - l_x) \cdot \cos(v_{T_n}^{T_{n+1}}) + y_l \cdot \cos(v_{T_{n+1}}^{T_n} + 90^\circ)$$

ODREĐIVANJE KOORDINATA DETALJNIH TAČAKA SIMETRIČNE PRELAZNE KRIVINE OBLIKA KUBNE PARABOLE

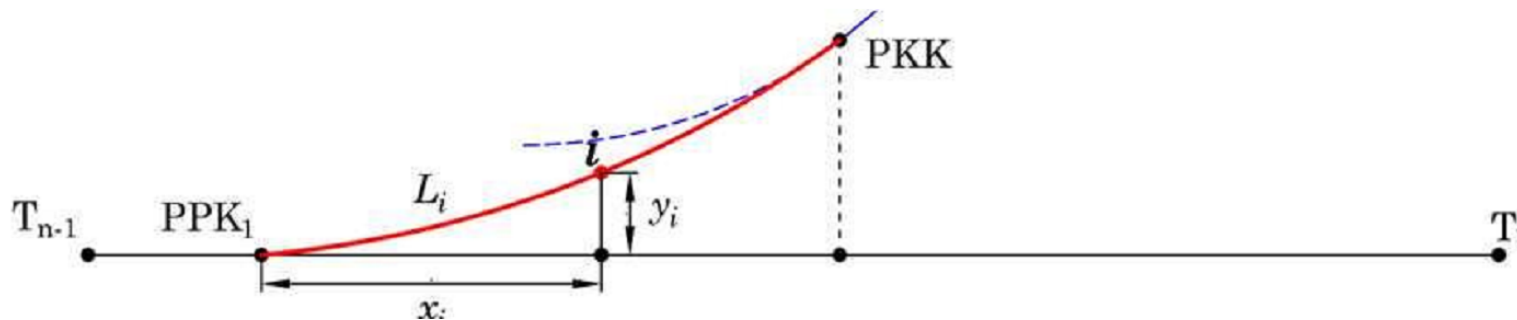
Dato: $Y_{T_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}, X_{T_n}, Y_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}$, glavni elementi i koordinate glavnih tačaka simetrične prelazne krivine oblika kubne parabole.

Nepoznato: $Y_1, X_2, Y_2, X_2, \dots, Y_n, X_n$.

Pravougle koordinate, odnosno apscise x_i i ordinate y_i , detaljnih tačaka određuju se na osnovu prethodno prikazanih formula.

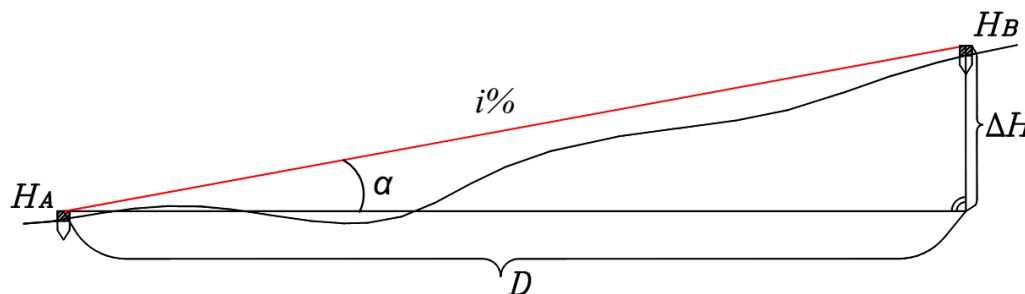
$$Y_i = Y_{PPK_1} + x_i \cdot \sin\left(v_{T_{n-1}}^{T_n}\right) + y_i \cdot \sin\left(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$

$$X_i = X_{PPK_1} + x_i \cdot \cos\left(v_{T_{n-1}}^{T_n}\right) + y_i \cdot \cos\left(v_{T_{n-1}}^{T_n} - 90^\circ\right)$$



PROJEKTOVANI NAGIB I NIVELETA

- Projektovani nagib definiše nepromenljivi pravac uspona i pada projektovane trase.
- Projektovani nagib definisan je visinama krajnjih tačaka i međusobnim horizontalnim rastojanjem.

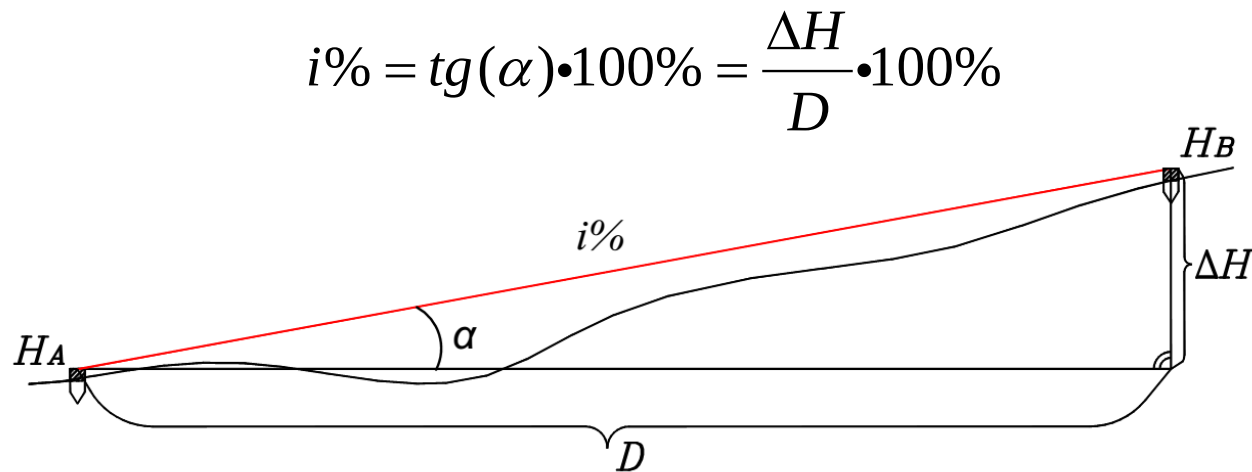


Niveleta – uzudžna linija koja definiše trasu (puta, pruge, cevovoda itd.) u visinskom smislu

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

Projektovani nagib (pad) izražen u procentima obično se koristi da označavanje „blagih“ padova, koji su karakteristični za podužne trase objekata (puteva, železnica, cevovoda itd.).

Podužni nagib (pad) predstavlja tangens ugla koji zahvataju pravac nagiba u odnosu na horizontalnu ravan.



PROJEKTOVANI PAD (NAGIB)

Postoji konvencija označavanja smera projektovanog pada (nagiba) :

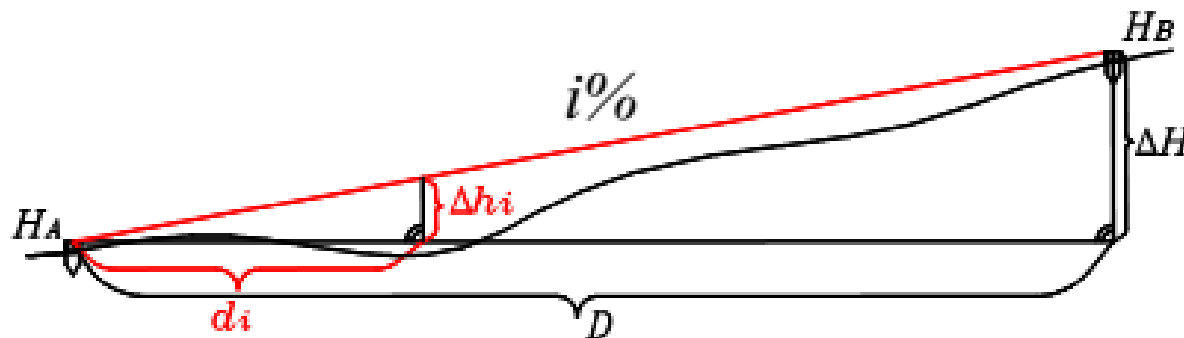
- Negativnim nagibom ($-i\%$) označava se pad projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže
- Pozitivnim nagibom ($+i\%$) označava se uspod projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže;

Nije retko da se uz vrednost projektovanog nagiba dodaje strelica iznad vrednosti nagiba ($i\%$). 

- Strelica označava smer pada terena pod određenim nagibom (pravac toka vode).

RAČUNANJE VISINA TAČKA NA PROJEKTOVANOM NAGIBU

- Projektovani pad (Nagib) definiše se visinama dve tačke i horizontalnim rastojanjem između tačaka.



$$\Delta H = H_B - H_A$$

$$i\% = \frac{\Delta H}{D} \cdot 100\%$$

$$\Delta h_i = \frac{i\%}{100\%} \cdot d_i = \frac{\Delta H}{D} \cdot d_i$$

$$H_i = H_A + \Delta h_i = H_A + \frac{\Delta H}{D} \cdot d_i$$

H_i - kota tačke na liniji projektovanog nagiba na proizvoljnom rastojanju

H_A, H_B - kota početne, odnosno krajnje tačke linije projektovanog nagiba

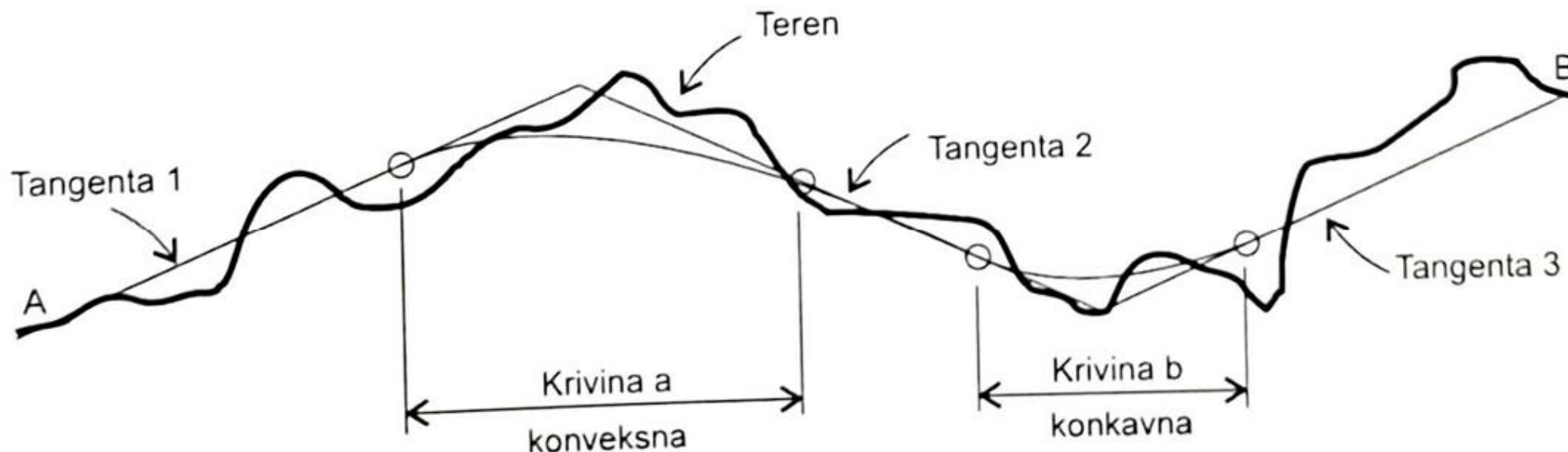
D - horizontalno rastojanje između krajnjih tačaka linije projektovanog nagiba

d_i - horizontalno rastojanje između tačke za koju se računa kota i početne tačke linije projektovanog nagiba

NIVELETA

NIVELETA je uzdužna linija koja definiše visinski tok trase objekta (puta, pruge, kanala, cevovoda itd.)

Slično kao kod horizontalne trase, visinska trasa se sastoji od tangenčnih pravaca koji su definisani nagibima i vertikalnih krivina.



Prilikom projektovanja osovine saobraćajnice u visinskom smislu potrebno je uzeti u obzir sledeće:

- usklađivanje sa profilom terena;
- izjednačenje zapremine iskopanog i nasutog materijala;
- obezbeđenje adekvatne drenaže;
- poštovanje dozvoljenih nagiba;

Obezbeđenje ukrštanja sa drugim saobraćajnicama. Vertikalne krivine treba da:

- budu prilagođene tangencijalnim segmentima nivelete;
- budu dovoljne dužine kako bi obezbedile konformnu vožnju;
- obezbede preglednost i bezbednost.

TIPOVI VERTIKALNIH KRIVINA

- Vertikalna krivina kružnog oblika
- **Vertikalna krivina oblika parabole**

PROJEKTOVANI PAD (NAGIB)

Postoji konvencija označavanja smera projektovanog pada (nagiba) :

- Negativnim nagibom ($-i\%$) označava se pad projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže
- Pozitivnim nagibom ($+i\%$) označava se uspod projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže;

Nije retko da se uz vrednost projektovanog nagiba dodaje strelica iznad vrednosti nagiba ($i\%$). 

- Strelica označava smer pada terena pod određenim nagibom (pravac toka vode).

SKRETNI UGAO VERTIKALNE KRIVINE

U projektovanju **vertikalnih krivina** nagibi se izražavaju u procentima, pri čemu se **negativan znak** koristi za **pad (nizbrdicu)**, a **pozitivan znak** za **uspon (uzbrdicu)**.

Na primer:

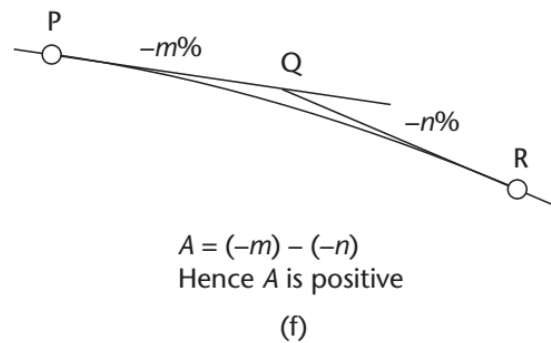
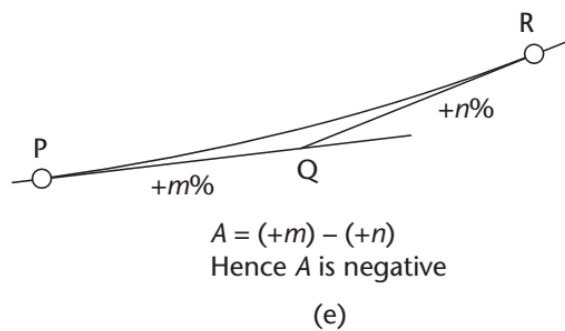
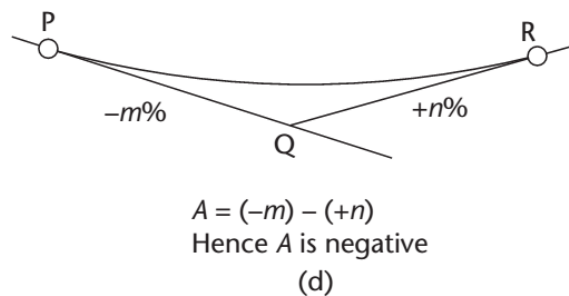
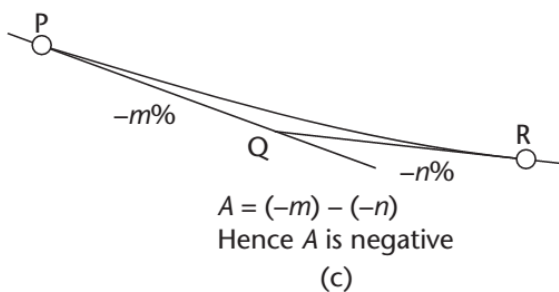
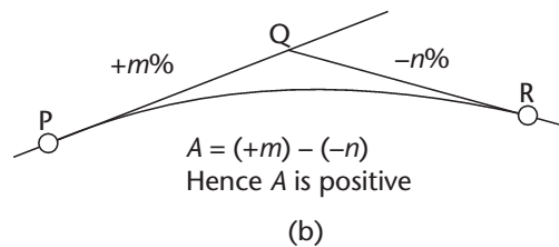
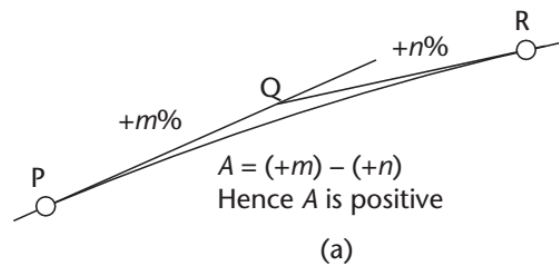
- Pad od 1 : 20 = 5 : 100 = -5% = -i1%
- Uspon od 1 : 25 = 4 : 100 = +4% = +i2%

Ugao skretanja dveju ukrštajućih gradijenata naziva se **ugao nagiba**. Ugao nagiba predstavlja jednostavno **promenu nagiba** kroz koju se vertikalna krivina savija i jednak je **algebarskoj razlici** dva nagiba:

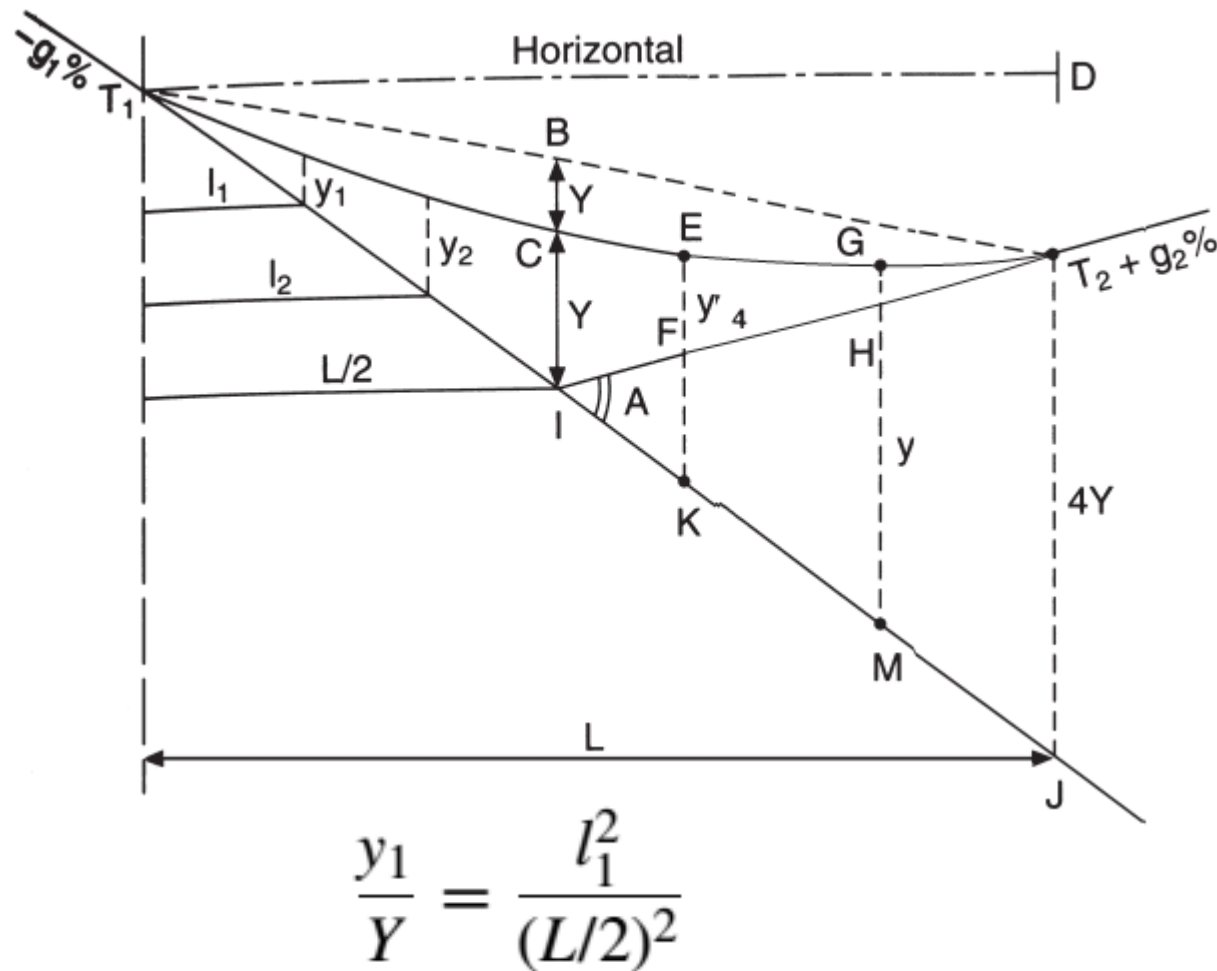
$$A\% = (i_1\% - i_2\%)$$

$$A\% = (-5\% - 4\%) = -9\%$$

TIPOVI VERTIKALNIH KRIVINA



VERTIKALNA KRIVINA OBLIKA PARABOLE



Poželjni maksimalni nagibi za dizajn vertikalnih krivina kod puteva je do 4%.

- podužni nagibi manji od 0,8% deluju kao da su ravni i praktično su neprimetni
- podužni nagibi od 1% do 3% su prepoznatljivi i primetni
- podužni nagibi od 4% do 8% su vizuelno veoma strmi

Zbog blagog nagiba, uvode se sledeće aproksimacije vertikalne krivine koje pojednostavljaju proračun bez značajnih odstupanja:

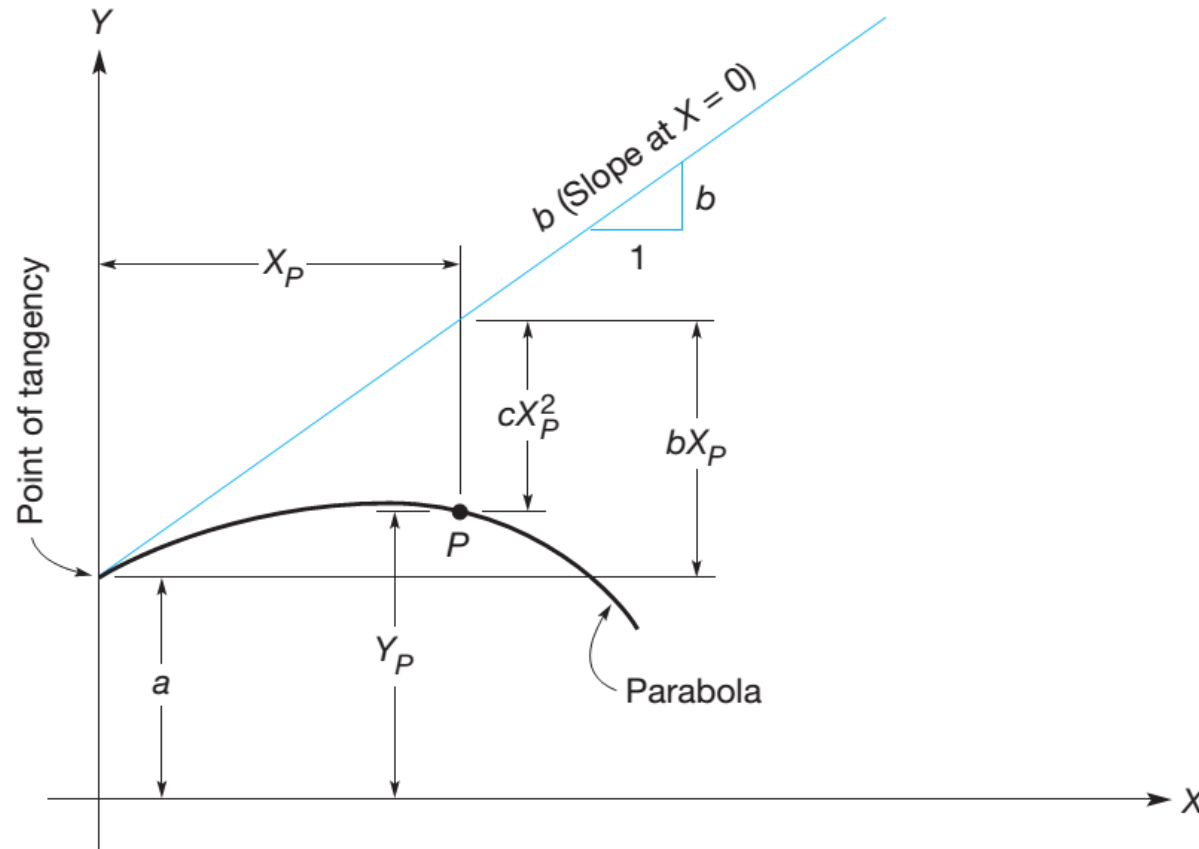
- Udaljenost $T1-D = T1-B-T2 = T1-C-T2 = (T1-I + I-T2)$. Ovo je vrlo važno jer znači da se sve udaljenosti mogu smatrati horizontalnim, kako u proračunu, tako i pri trasiranju vertikalnih krivina.
- Krivina je iste dužine sa obe strane tačke I.

$$T1-C = C-T2 = T1-I = I-T2 = L/2.$$

- $BC = CI = Y$ (srednje odstoynje).
- Iz sličnih trouglova $T1-B-I$ i $T1-T2-J$, ako je $B-I = 2Y$, tada je $T2-J = 4Y$. $4Y$ predstavlja vertikalno odstupanje između dva nagiba na polovini dužine krivine ($L/2$) i, prema tome, jednako je $AL/200$.
- Osnovna jednačina za jednostavnu parabolu je:

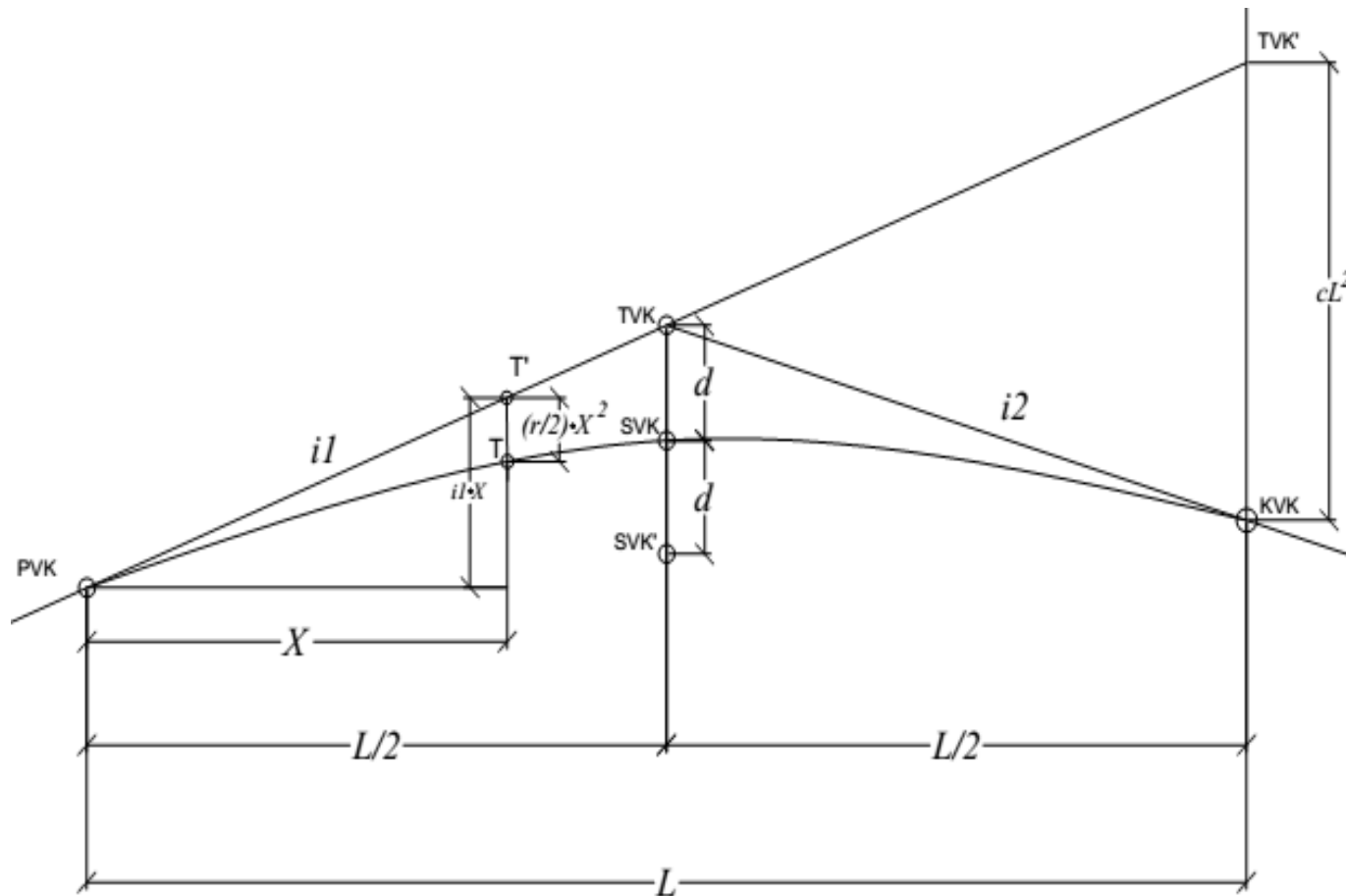
$$y = C \cdot l^2$$

OPŠTI OBLIK VERTIKALNE KRIVINE OBLIKA PARABOLE



$$Y_P = a + bX_P + cX_P^2$$

OPŠTI OBLIK KRIVINE OBLIKA PARABOLE



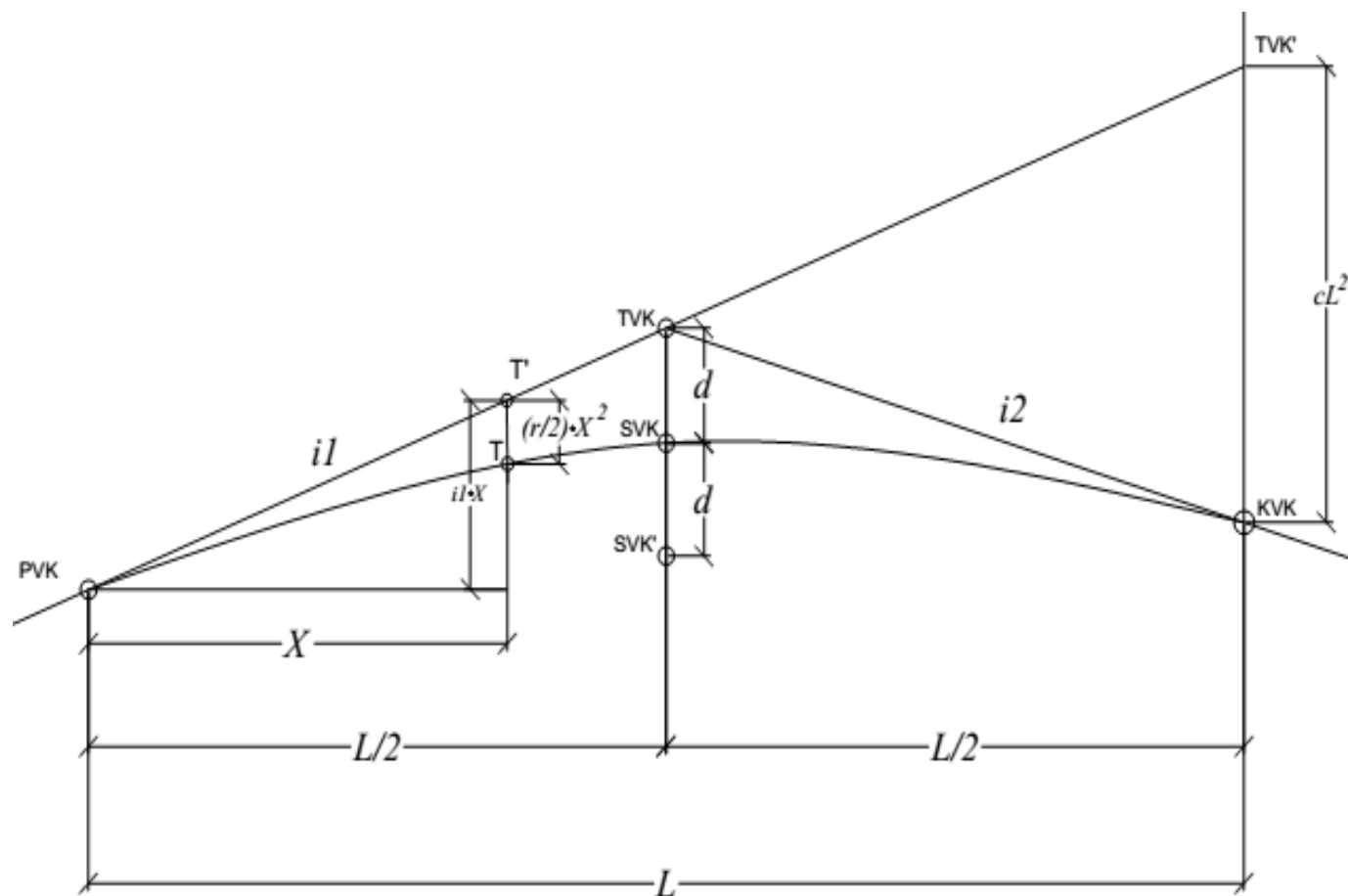
$$cL^2 = i_1 \left(\frac{L}{2} \right) + i_2 \left(\frac{L}{2} \right) - i_1 L \Rightarrow c = \frac{i_2 - i_1}{2L}$$

$$H = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{i_2 - i_1}{2L} \right) X^2$$

$$r = \frac{i_2 - i_1}{L} \quad \text{- Stopa promene skretnog ugla}$$

$$H = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{r}{2}\right) X^2$$

RAČUNANJE VISINA PROIZVOLJNIH TAČAKA NA KRIVINI



$$H_T = \overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot X}^{H_{T'}} + c \cdot X^2$$

$$c = \frac{i_2 - i_1}{2 \cdot L} \quad r = \frac{i_2 - i_1}{L}$$

$$H_T = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{r}{2}\right) \cdot X^2$$

PRIMER RAČUNANJA VISINA TAČAKA NA KRIVINI

Dati su nagibi tangenti vertikalne krivine $i_1 = -3,629\%$ i $i_2 = 0,151\%$, Stacionaža temena je 5 + 265,00 m, a visina 350,520 m. Dužina vertikalne krivine oblika parabole je 240m. Potrebno je izračunati visine tačaka na svakih 40m.

$$\text{VPI Station} = 5 + 265$$

$$-L/2 = 120$$

$$\text{BVC Station} = 5 + 145$$

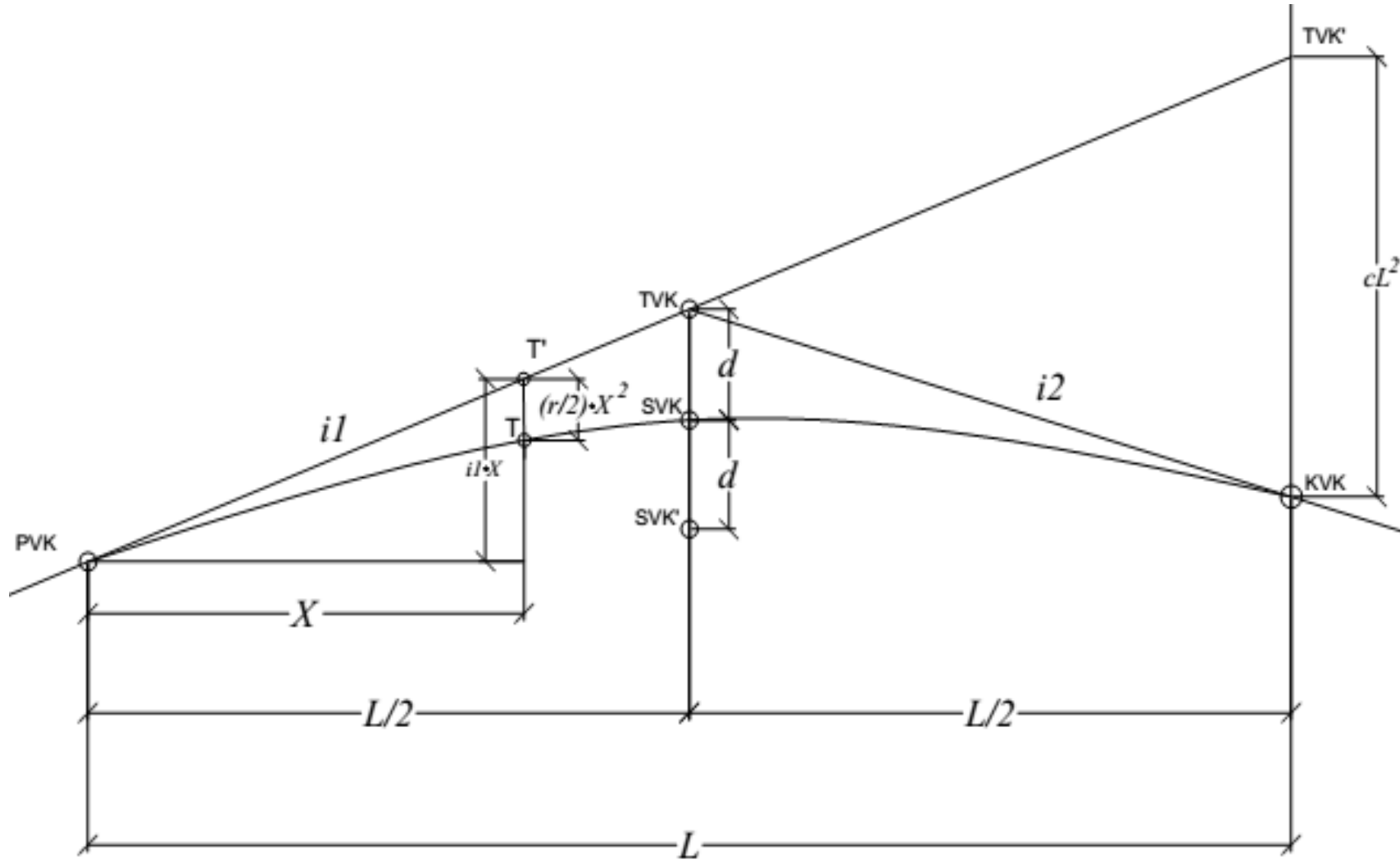
$$+L = 240$$

$$\text{EVC Station} = 5 + 385$$

$$\text{Elev}_{\text{BVC}} = 350.520 + 3.629(120/100) = 354.875$$

Hpvk	354.875								
i1	-3.629								
i2	0.151								
r=	0.000158								
	Stacionaža			xi	i1 · xi	r/2 · xi ²	Hi	Δ1	Δ2
KVK	5	+	385	240	-8.710	4.536	350.701		
	5	+	360	215	-7.802	3.640	350.713	-0.223	0.252
	5	+	320	175	-6.351	2.412	350.936	-0.475	0.252
	5	+	280	135	-4.899	1.435	351.411	-0.727	0.252
	5	+	240	95	-3.448	0.711	352.138	-0.979	0.252
	5	+	200	55	-1.996	0.238	353.117	-1.231	
	5	+	160	15	-0.544	0.018	354.348		
PVK	5	+	145	0	0.000	0.000	354.875		

RAČUNANJE SREDINE VERTIKALNE KRIVINE



$$H_{SVK'} = (H_{PVK} + H_{KVK}) / 2$$

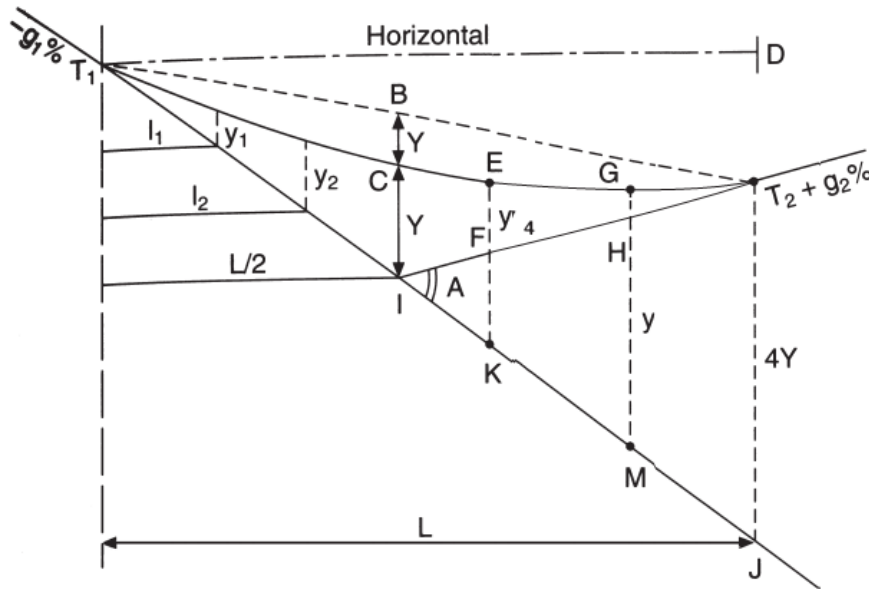
$$2d = H_{TVK} - H_{SVK'}$$

$$d = \frac{H_{TVK} - H_{SVK'}}{2}$$

$$H_{SVK} = H_{TVK} - d$$

RAČUNANJE VISINA NA OSNOVU PROPORCIJA

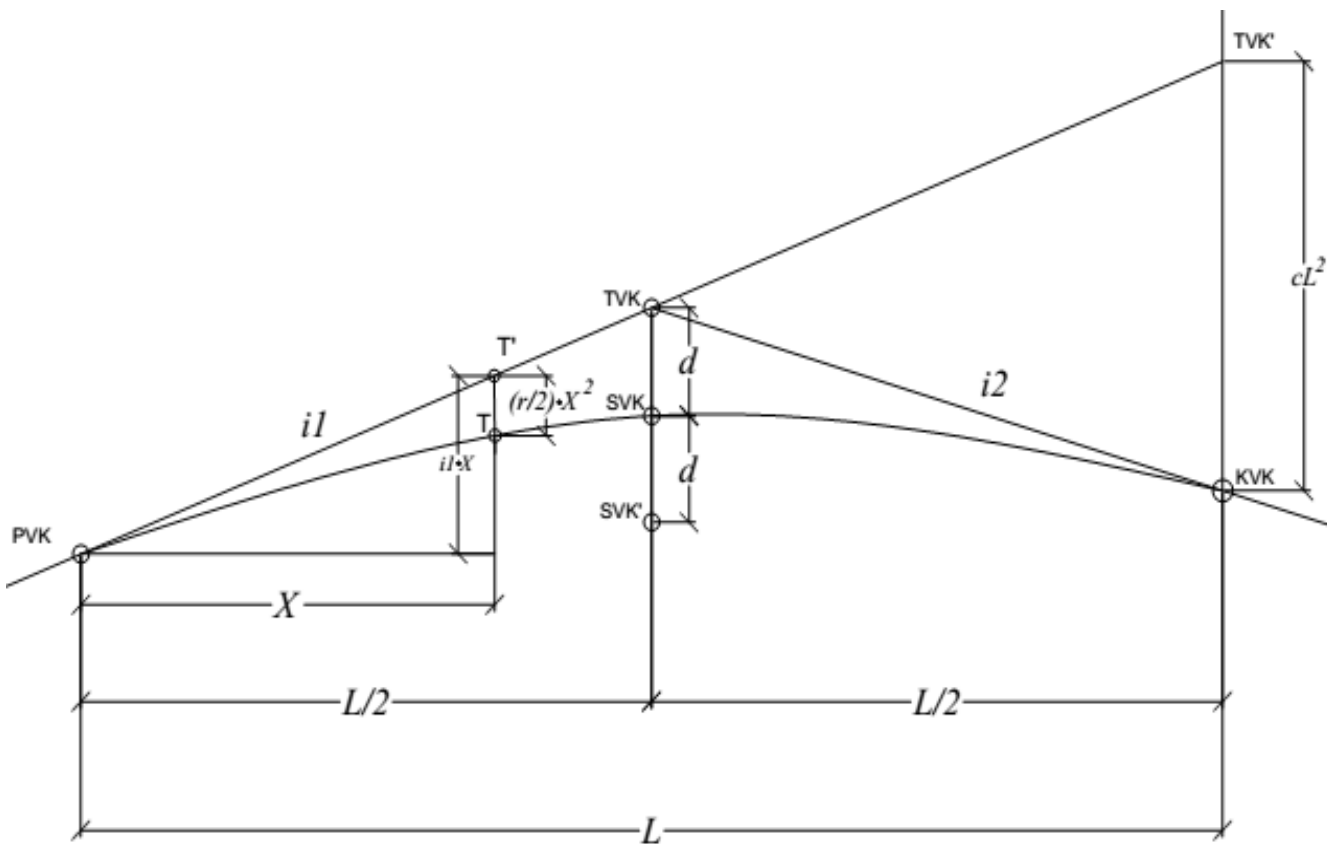
Vertikalna udaljenja od tangente do parabole su proporcionalna kvadratima udaljenosti od početka krivine.



$$\frac{y_1}{Y} = \frac{l_1^2}{(L/2)^2} \Rightarrow y_1 = Y \cdot \frac{l_1^2}{(L/2)^2}$$

RAČUNANJE VISINA NA OSNOVU PROPORCIJA

Izračunavanje vertikalnog udaljenja u sredini krivine, a zatim izračunavanje vertikalnog udaljenja na bilo kojoj drugoj udaljenosti X od početka krivine moguće je dobiti prema proporciji koristeći sledeću formulu:

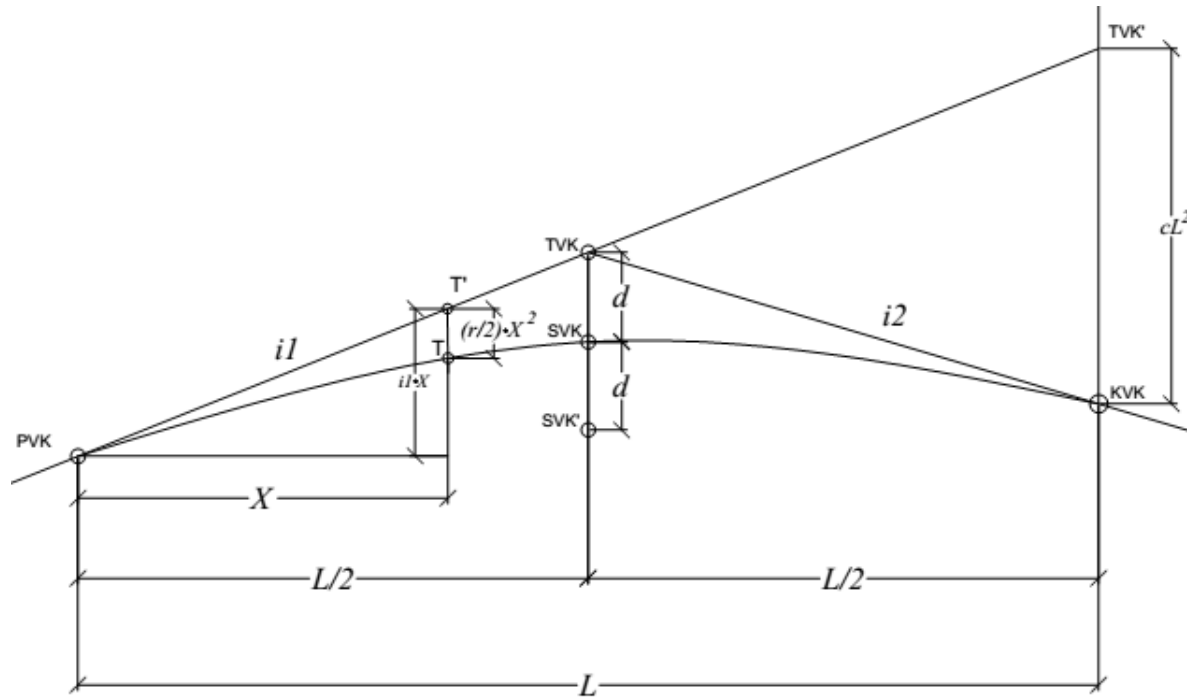


$$TT' = \frac{r}{2} \cdot X^2 = Y_T \quad \frac{Y_T}{X_T^2} = \frac{d}{(L/2)^2}$$

$$\frac{Y_T}{d} = \frac{X_T^2}{(L/2)^2} \quad \Rightarrow \quad Y_T = d \cdot \left(\frac{X_T}{L/2} \right)^2$$

$$\Rightarrow H_T = H_{PVK} + i \cdot X_T + \underbrace{d \cdot \left(\frac{X_T}{L/2} \right)^2}_{Y_T}$$

RAČUNANJE SREDINE VERTIKALNE KRIVINE



$$\frac{(TT')}{X^2} = \frac{d}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$TT' = \left(\frac{X}{\frac{L}{2}}\right)^2 \cdot d$$

RAČUNANJE NAJVIŠE I NAJNIŽE TAČKE KRIVINE

Da bi se ispitali uslovi odvodnjavanja, eventualna rastojanja ispod nadzemnih konstrukcija, pokrivenost podzemnih instalacija ili vidljivost duž vertikalne krivine, može biti neophodno odrediti visinu i lokaciju najviše ili najniže tačke vertikalne krivine. Na tim tačkama tangenta krivine će biti horizontalna, a njen nagib će biti jednak nuli. Na osnovu ove činjenice, izjednačavanjem izvoda funkcije krive sa nulom, dobija se:

$$X_{\max/\min} = \frac{i_1 \cdot L}{i_1 - i_2}$$

DIZAJN VERTIKALNE KRIVINE UZ USLOV FIKSNE VISINE NA ODREĐENOJ TAČKI

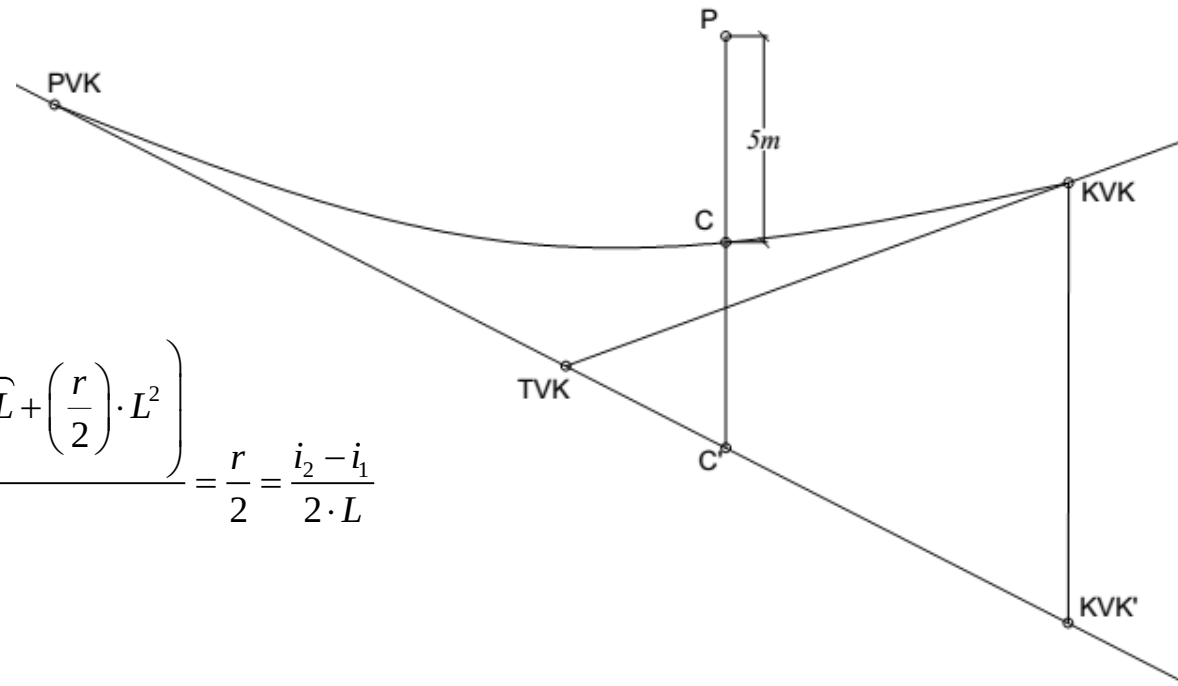
$$H_{C'} = H_{PVK} - l_x \cdot i_1$$

$$H_C = H_P - \Delta H(5m)$$

$$CC' = H_C - H_{C'}$$

$$\frac{H_C - H_{C'}}{(X_C)^2} = \frac{H_{KVK} - H_{KVK'}}{L^2} = \frac{\left(\overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot L}^{H_{KVK'}} \right) - \left(\overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot L}^{H_{KVK'}} + \left(\frac{r}{2} \right) \cdot L^2 \right)}{L^2} = \frac{r}{2} = \frac{i_2 - i_1}{2 \cdot L}$$

$$\rightarrow L = \frac{(i_2 - i_1)(X_C)^2}{2 \cdot (H_C - H_{C'})}$$



Hvala na pažnji!